ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 31 Οκτωβρίου 2019

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 3

1. Έστω $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ λύση του

$$(\star) \qquad -\Delta u(x) = 1, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει λύση u της $(\star)$ που να ικανοποιεί

$$|u(x)| \le M(|x|^{3/2} + 1), \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

(για κατάλληλη σταθερά $M > 0$).

β) Βρείτε όλες τις u που ικανοποιούν την $(\star)$ και για τις οποίες $\exists\, M > 0$, ώστε

$$|u(x)| \le M(|x|^2 + 1), \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

2. Έστω $u \ge 0$ είναι αρμονική συνάρτηση στο $B_1 = \{|x| < 1\}$. Αποδείξτε τότε ότι ισχύουν

$$\frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}\, u(0) \ge u(x) \ge \frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}\, u(0), \quad \forall x \in B_1.$$

Υπόδειξη: Μελετήστε αρχικά την περίπτωση $u \in \mathbf{C}(\overline{B_1})$.

3. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και $u, v \in \mathbf{C}(\Omega)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις στο Ω. Αποδείξτε ότι:

α) η $\max(u,v)$ είναι υφαρμονική, $(\max(u,v)(x) = \max(u(x), v(x)),\ x \in \Omega)$

β) η $|u|$ είναι υφαρμονική επίσης,

γ) εαν επιπρόσθετα $\max(u,v) \ge 0$ τότε η $\max(u,v)^2$ είναι υφαρμονική επίσης. Είναι τότε η $\max(u,v)^4$ υφαρμονική επίσης;

δ) εαν δεν ισχύει $\max(u,v) \ge 0$ αποδείξτε τότε με αντιπαράδειγμα ότι η $\max(u,v)^2$ μπορεί να μην είναι υφαρμονική.

Υπόδειξη: Μελετήστε αρχικά την ανισότητα Jensen.

4. Βρείτε τη συνάρτηση Green του χωρίου

$$\Omega = (0, +\infty) \times (0, +\infty),$$

και στη συνέχεια να βρείτε μια αναπαράσταση της λύσης $u \in \mathbf{C}^2((0, +\infty) \times (0, +\infty)) \cap \mathbf{C}^1([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ του προβλήματος

$$(\star) \quad \begin{cases} -\Delta u(x,y) &= & 0, \quad x > 0, \; y > 0 \\ u(x,0) &= & f(x), \quad x \geq 0, \\ u(0,y) &= & g(y), \quad y \geq 0, \end{cases}$$

όπου $f, g \in \mathbf{C}^1_c([0, +\infty))$ είναι τέτοιες ώστε $f(0) = g(0),$ και $f'(0) = g'(0)$.

5. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό. Έστω $G(x, y), \; x \neq y$ είναι η η συνάρτηση του Green στο χωρίο Ω. Με χρήση των ταυτοτήτων του Green στο χωρίο $\Omega - B(x, \varepsilon) - B(y, \varepsilon)$ στις συναρτήσεις

$$u(z) = G(x, z), \;\; w(z) = G(y, z), \; z \in \Omega$$

αποδείξτε τη συμμετρικότητα της συνάρτησης του Green, δηλαδή ότι ισχύει

$$G(x, y) = G(y, x), \; x \neq y.$$

6. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό και $u \in \mathbf{C}(\Omega)$.

α) Εαν η u είναι υφαρμονική στο Ω με $B(x, r) \subset \Omega$ και $h \in \mathbf{C}^2(B(x, r)) \cap \mathbf{C}(\overline{B(x, r)})$ που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} -\Delta h(x) &= 0, \quad x \in B(x, r), \\ h(x) &\geq u(x), \; x \in \partial B(x, r) \; . \end{aligned}$$

αποδείξτε τότε ότι ισχύει

$$h(y) \geq u(y), \;\; \forall y \in B(x, r).$$

β) (Αντίστροφα) Εαν $\forall B(x, r) \subset \Omega$ η λύση $h \in \mathbf{C}^2(B(x, r)) \cap \mathbf{C}(\overline{B(x, r)})$ του

$$\begin{aligned} -\Delta h(x) &= 0, \quad x \in B(x, r), \\ h(x) &\geq u(x), \; x \in \partial B(x, r) \; . \end{aligned}$$

ικανοποιεί

$$h(y) \geq u(y), \;\; \forall y \in B(x, r),$$

αποδείξτε τότε ότι η u είναι υφαρμονική.
Προσοχή! Η λύση h εξαρτάται και από το χωρίο $B(x, r)$!

7. Έστω $u \in \mathbf{C}(\overline{B_1})$ που έχει την ιδιότητα

$$\forall x \in B_1, \ \ \exists\, r_x > 0, \ \ B(x, r_x) \subset B_1,$$

έτσι ώστε να ισχύει

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r_x)} u(y)\, dS_y \ .$$

Αποδείξτε ότι η u είναι αρμονική συνάρτηση.

<u>Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει προσωπικά τη μεθεπόμενη Πέμπτη (14/11/19) στο μάθημα.</u>

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>