ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 21 Νοεμβρίου 2019

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 4

1. Δίδεται η εξίσωση

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 1, \qquad 0<x<1, \quad t>0, \\ u(x,0) &= 0, \qquad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \qquad t>0. \end{aligned}$$

Έστω $\psi(x)$ η λύση του στάσιμου προβλήματος δηλ.

$$-\psi_{xx} = 1, \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

(α) Δείξτε οτι υπάρχει σταθερά $\beta > 0$ τ.ω.

$$(1 - e^{-\beta t})\psi(x) \le u(x,t) \le \psi(x), \qquad t>0,$$

(β) Συμπεράνετε οτι καθώς $t \to +\infty$ η $u(x,t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\psi(x)$.

2. Έστω $g : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ ομαλή συνάρτηση ώστε $g(0) = 0$. Αποδείξτε χωρίς επαλήθευση, ότι ο τύπος

$$u(x,t) := \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \, e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} \, g(s) \, ds \, ,$$

μας δίνει τη λύση του Προβλήματος Αρχικών Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \quad x>0, \quad t>0, \\ u(x,0) &= 0, \quad x>0, \\ u(0,t) &= g(t), \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ και κατάλληλη επέκταση αυτής για $x<0$.

3. Τη συνάρτηση $v \in \mathbf{C}^{2,1}(\Omega_T)$ τη λέμε υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας εαν ικανοποιεί την

$$v_t - \Delta v \le 0, \qquad \text{στο} \quad \Omega_T.$$

α) Αποδείξτε ότι αν v είναι υπολύση τότε ικανοποιεί

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4(4\pi)^{n/2} r^n} \int\int_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} \, dy \, ds$$

για όλα

$$E(x,t;r) \subseteq \Omega_T.$$

β)(Συνέχεια του α) Αποδείξτε επίσης ότι

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v = \max_{\partial^* \Omega_T} v.$$

γ) Έστω $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομαλή κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε u λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{στο} \quad \Omega_T,$$

και θέτουμε $v := \phi(u)$. Αποδείξτε ότι η v είναι υπολύση της εξίσωσης θερμότητας.
δ)(Συνέχεια του γ) Αποδείξτε ότι η $w := |\nabla u|^2 + u_t^2$ είναι υπολύση της εξίσωσης θερμότητας, αν η u είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας.

4. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $w \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= 1, \quad x \in \Omega, \\ w(x) &= 0, \; x \in \partial\Omega \; . \end{aligned}$$

Αν $u \in \mathbf{C}^{2,1}(\Omega_T) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= 1, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) &= 0, \; x \in \Omega, \\ u(x,t) &= 0, \; x \in \partial\Omega, t \in [0,T], \end{aligned}$$

αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = w(x), \quad \text{ομοιόμορφα στο } \Omega.$$

5. Έστω $u \in \mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0,+\infty))$ θετική λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \; t > 0.$$

Αποδείξτε την ακόλουθη μορφή της ανισότητας Harnack

$$u(x,t) \geq u(y,s) \left(\frac{s}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad t > s > 0.$$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει προσωπικά τη μεθεπόμενη Πέμπτη (5/12/19) στο μάθημα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!