ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 5 Δεκεμβρίου 2019

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 5

1. Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} 3u_t^2(x,t) &- u_x^2(x,t) + u(x,t) = 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0, \\ u(x,0) &= x^2, \;\; x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

έχει κλασσικές λύσεις. Ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων;

2. Για $\phi \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$ θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} xu_x(x,t) &- tu_t(x,t) = 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \;\; x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι πρόβλημα **δεν** έχει κλασσική λύση εκτός εάν $\phi(x) \equiv c, \;\; x \in \mathbf{R}$. Εάν $\phi(x) \equiv 1, \;\; x \in \mathbf{R}$ αποδείξτε τότε ότι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

3. Αποδείξτε ότι η λύση προβλήματος

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \;\; x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \;\; x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

όπου $f, g \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ ικανοποιεί

$$||u_t^2 - u_x^2||_{L^2(\mathbf{R}\times[0,+\infty))} \leq c\left(||f'||^2_{L^2(\mathbf{R})} + ||g||^2_{L^2(\mathbf{R})}\right)$$

για κατάλληλη θετική σταθερά c ανεξάρτητη των $u, \; f, \; g$.

4. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών Π.Α.Σ.Τ.

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &- u_{xx}(x,t) - c^2\, u_{xxtt}(x,t) = f(x,t), \;\; x \in (0,1), \; t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \;\; x \in (0,1), \\ u_t(x,0) &= g(x), \;\; x \in (0,1), \\ u(0,t) &= h_1(t), \;\; t > 0, \\ u(1,t) &= h_2(t), \;\; t > 0. \end{aligned}$$

5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών Π.Α.Τ.

$$u_{xx}(x,t) \; - \; 2\sin x \; u_{xt}(x,t) \; - \cos^2 x \; u_{tt}(x,t) \; - \cos x \; u_t(x,t) = \; 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0,$$
$$u(x,0) \; = \; f(x), \;\; x \in \mathbf{R},$$
$$u_t(x,0) \; = \; g(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

Θεωρείστε γνωστό ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από το σημείο (x_0, t_0) είναι οι

$$t - \cos x - x = t_0 - \cos x_0 - x_0,$$

$$t - \cos x + x = t_0 - \cos x_0 + x_0.$$

Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι ομαλές. Υποθέτουμε επίσης

$$x_1 = x_1(x_0, t_0), \quad x_2 = x_2(x_0, t_0),$$

είναι τα σημεία που τέμνουν οι χαρακτηριστικές καμπύλες την ευθεία $t = 0$. Αποδείξτε (χωρίς επιβεβαίωση) ότι η λύση δίνεται από τον τύπο

$$2u(x_0, t_0) = (1 - \sin x_1) f(x_1) + (1 + \sin x_2) f(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \left(\cos^2 x \; g(x) - \cos x \; f(x)\right) dx.$$

6. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του ΠΑΤ

$$u_{xx}(x,t) \; - \; 2\sin x \; u_{xt}(x,t) \; - \cos^2 x \; u_{tt}(x,t) \; - \cos x \; u_t(x,t) = \; f(x,t), \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0,$$
$$u(x,0) \; = \; f(x), \;\; x \in \mathbf{R},$$
$$u_t(x,0) \; = \; g(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

7. Έστω $\alpha, \beta : \overline{B(0,1)} \to \mathbf{R}$ είναι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Έστω επίσης $u \in \mathbf{C}^1(\overline{B(0,1)})$ είναι λύση του προβλήματος

$$\alpha(x,y) \; u_x(x,y) + \beta(x,y) \; u_y(x,y) = u^2(x,y), \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Εαν επιπρόσθετα ισχύει

$$\alpha(x,y) \; x + \beta(x,y) \; y < 0, \; \forall (x,y), \quad x^2 + y^2 = 1,$$

αποδείξτε τότε ότι

$$u(x,y) \leq 0, \;\; \forall (x,y), \;\; x^2 + y^2 = 1.$$

<u>Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει προσωπικά τη μεθεπόμενη Πέμπτη (19/12/19) στο μάθημα.</u>

<u>**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**</u>