ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 19 Δεκεμβρίου 2019

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 6

1. Στο ανοικτό $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ δίνεται ο ελλειπτικός τελεστής

$$\mathscr{L}(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}(x),$$

δηλ. ικανοποιεί

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdot, \xi_n), \quad \forall x \in \Omega.$$

α) Εάν $u \in \mathbf{C}^2(\Omega)$ ικανοποιεί

$$\mathscr{L}(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

και $\phi \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ κυρτή συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\mathscr{L}(\phi(u)) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, (\phi(u(x))_{x_i x_j} \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

β) Εάν $w \in \mathbf{C}^2(\Omega)$ ικανοποιεί

$$\mathscr{L}(w) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, w_{x_i x_j}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

και $\psi \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ αύξουσα και κυρτή συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\mathscr{L}(\psi(w)) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, (\psi(w(x))_{x_i x_j} \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

2. (Λήμμα Hopf) Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ και $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\bar{\Omega}_T)$ ικανοποιεί την

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T,$$

Υποθέτουμε οτι υπάρχουν $t_0 \in (0, T]$ και $x_0 \in \partial\Omega$ τέτοια ώστε

$$u(x,t) > u(x_0,t_0), \qquad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq t_0.$$

Δείξτε οτι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0,t_0) < 0,$$

όπου ν το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω του Ω διάνυσμα στο x_0

3. Δίνεται το ανοικτό χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, και $u \in \mathbf{C}(\Omega)$ υφαρμονική στο Ω. Έστω συνάρτηση $\phi \in \mathbf{C}^2(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε η $u - \phi$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in \Omega$. Αποδείξτε τότε ότι ισχύει

$$-\Delta\phi(x_0) \leq 0.$$

4. Για $\phi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ θεωρούμε το χωρίο $\mathscr{C}_{\phi_0} \subset \mathbf{R}^2$,

$$\mathscr{C}_{\phi_0} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \ \mid \ 0 < r < 1, \ \ -\phi_0 < \theta < \phi_0 .\}$$

Αποδείξτε ότι το 0 είναι ομαλό σημείο του συνόρου του χωρίου $\mathscr{C}_{\phi_0}$ (Μέθοδος Perron).

5. Στο ανοικτό και φραγμένο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ δίνεται ο ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής

$$\mathscr{L}(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}(x),$$

δηλ. υπάρχει $\theta > 0$ ώστε να ικανοποιεί

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \theta\, |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdot, \xi_n), \ \ \forall x \in \Omega.$$

Υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι οι συντελεστές ικανοποιούν

$$a_{ij} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}), \ \ i,j = 1, 2, \cdots, n.$$

Εαν $u \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega})$ λύση του

$$\mathscr{L}(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}(x) = 0, \ \ \forall x \in \Omega$$

αποδείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά λ που εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές ώστε η

$$w(x) = |\nabla u(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2, \quad x \in \overline{\Omega},$$

να ικανοποιεί

$$\mathscr{L}(w) \leq 0, \ \ \forall x \in \Omega.$$

Συμπεράνατε την εκτίμηση

$$|\nabla u|_{L^\infty(\Omega)} \le c\left(|\nabla u|_{L^\infty(\partial\Omega)} + |u|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right),$$

όπου η θετική σταθερά c εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές.

6. (Ο στόχος της άσκησης είναι να αποδείξουμε το Λήμμα του Hopf σε $\mathbf{C}^{1,\alpha}$ χωρία). Για $\alpha \in (0,1)$ δίνεται το χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \ge 2$,

$$\Omega = \{\ x = (x', y) \mid y > |x'|^{1+\alpha}\ \}$$

Έστω $u \in \mathbf{C}^2(\Omega \cap B_1) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega} \cap B_1)$ συνάρτηση που ικανοποιεί

$$-\Delta u(x) \ge 0, \quad x \in \Omega \cap B_1,$$

και επιπρόσθετα

$$u(0,0) = 0, \quad u(x', y) > 0, \quad (x', y) \in \Omega \cap B_1.$$

Αποδείξτε ότι

$$u_y(0,0) < 0.$$

Υπόδειξη: Κατασκευάστε τη βοηθητική συνάρτηση $h = h(x', y)$ τέτοια ώστε $h(0,0) = 0$, $h(x', y) < 0$, $(x', y) \in \Omega_2 \cap B_\delta$, όπου

$$\Omega_2 = \{\ x = (x', y) \mid y > 2|x'|^{1+\alpha}\ \}.$$

Μάλιστα την h μπορείτε να τη φτιάξετε να έχει τη μορφή

$$h(x', y) = y + Q(y) - 2(|x'|^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

και να ικανοποιεί

$$-\Delta h(x', y) \ge 0, \quad (x', y) \in \overline{\Omega_2} \cap B_1.$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>