



Πέμπτη 8 Οκτωβρίου 2026

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 1

1). Έστω $B_1 \subset \mathbf{R}^n$ και $f \in C(B_1)$. Αποδείξτε ότι
α)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_r} f(X) dX = f(0).$$

β) Εάν επιπρόσθετα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, αποδείξτε τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{B_r} (f(X) - f(0)) dX = 0.$$

2). Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Την $v \in C^2(\Omega)$ τη λέμε υφαρμονική εάν ικανοποιεί

$$-\Delta v(x) \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

α) Αποδείξτε ότι αν v υφαρμονική τότε ισχύει:

$$v(x) \leq \int_{B(x,r)} v(y) dy, \quad \forall B(x,r) \subset \Omega.$$

β) Έστω $u \in C^2(\Omega)$ που επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$u(x) \leq \int_{B(x,r)} u(y) dy, \quad \forall B(x,r) \subset \Omega.$$

Αποδείξτε ότι η u είναι υφαρμονική.

3). (Χωρίς χρήση της ομαλότητας αρμονικών συναρτήσεων) Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και $u \in C(\Omega)$ που έχει την ιδιότητα

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) dy, \quad \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

Αποδείξτε τότε ότι η u έχει και την ιδιότητα

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y, \quad \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

4). Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$, $f \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathbf{C}(\partial\Omega)$ λύση του

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά c που εξαρτάται μόνο από το χωρίο Ω (με ποιόν τρόπο;) ώστε να ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq c \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| + \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| \right).$$

5). Έστω u μη αρνητική αρμονική συνάρτηση στο χωρίο $\Omega = (0, 6) \times (0, 4) \subset \mathbf{R}^2$. Αποδείξτε την ανισότητα

$$2^{-4} u(2, 2) \leq u(4, 2) \leq 2^4 u(2, 2).$$

6). α) Βρείτε ακτινικά συμμετρική λύση της εξίσωσης

$$-\Delta u(x) + u(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3,$$

στην μορφή $u(x) = \frac{f(r)}{r}$, $r = |x|$ με $f(0) > 0$.

β) Βρείτε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης

$$-\Delta u(x) + u(x) = \delta_0, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

γ) Έστω u λύση της εξίσωσης. Αποδείξτε ότι η λύση u έχει την εξής “γενικευμένη ιδιότητα μέσης τιμής”

$$u(x) = \frac{\rho}{\sin(\rho)} \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) dS_y, \quad 0 < \rho < \pi.$$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει προσωπικά τη Πέμπτη (29/10/26) στο μάθημα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!