ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 28 Ιανουαρίου 2020

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (Κλασική Θεωρία)

Α. Θεωρία

Θέμα 1. α) Διατυπώστε την Ασθενή και την Ισχυρή μορφή του μεγίστου για τις λύσεις της εξίσωσης θερμότητας.

β) Διατυπώστε το Θεώρημα της ˇ Μέσης Τιμής ˇ για τις λύσεις της εξίσωσης θερμότητας.

γ) Περιγράψτε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών για την επίλυση του προβλήματος

$$\begin{aligned} F(u_x, u_y, u, x, y) &= 0, \quad x \in \mathbf{R},\ y > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

με τις συναρτήσεις F, g να είναι ομαλές.

Θέμα 2. Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα της ανισότητας Harnack για αρμονικές συναρτήσεις.

Θέμα 3. Διατυπώστε και αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων της κυματικής εξίσωσης στο $\mathbf{R}^n \times [0, +\infty)$.

Θέμα 4. Διατυπώστε και αποδείξτε το Λήμμα του Hopf για υπεραρμονικές συναρτήσεις.

Θέμα 5. α) Διατυπώστε το Θεώρημα του Perron για την επίλυση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

για φραγμένα χωρία $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

β) Ορίστε πότε το $\xi \in \partial\Omega$ είναι ομαλό σημείο για τη μέθοδο του Perron.

γ) Αποδείξτε ότι αν το φραγμένο χωρίο Ω είναι $\mathbf{C}^2$ χωρίο, τότε κάθε σημείο του $\partial\Omega$ είναι ομαλό σημείο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!