ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 28 Ιανουαρίου 2020

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Β. Ασκήσεις

1. Να λυθεί με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών το Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &- u_x^2(x,t) + u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \frac{x^2+1}{4}, \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2. Βρείτε όλες τις αρμονικές συναρτήσεις $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ που ικανοποιούν

$$u_{xx}(x,y) \geq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

3. Δίνεται το ανοικτό χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, και $u \in \mathbf{C}(\Omega)$ υφαρμονική στο Ω. Έστω συνάρτηση $\phi \in \mathbf{C}^2(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε η $u - \phi$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in \Omega$. Αποδείξτε τότε ότι ισχύει

$$-\Delta\phi(x_0) \leq 0.$$

4. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο ομαλό ($\partial\Omega \in \mathbf{C}^2$) χωρίο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ που έχει την ιδιότητα

$$\forall x \in \Omega, \ \ \exists\, r_x > 0, \ \ B(x, r_x) \subset \Omega,$$

έτσι ώστε να ισχύει

$$u(x) = \fint_{\partial B(x, r_x)} u(y)\, dS_y \,.$$

Αποδείξτε ότι η u είναι αρμονική συνάρτηση.

5. Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο ομαλό χωρίο. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $f,\ g$, είναι ομαλές και τέτοιες ώστε το πρόβλημα να έχει κλασική λύση.

6. Δίνεται το πρόβλημα Cauchy

$$\frac{4t^2}{1+t^2}\,u_{xx}(x,t)+\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}\,u_{xt}(x,t)-\frac{1}{1+t^2}\,u_{tt}(x,t)-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,(2u_x(x,t)-u_t(x,t))=0, x\in\mathbf{R}, t>0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x),\quad x\in\mathbf{R},\\ u_t(x,0) &= g(x),\quad x\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $f, g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ είναι ομαλές. Θεωρείστε γνωστό ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από το σημείο $(x_0,t_0),\ t_0>0$ είναι οι

$$2t+x=2t_0+x_0,$$

$$2t^3-3x=2t_0^3-3x_0.$$

Με κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος Green να προσδιορίστε την τιμή της λύσης $u(x_0,t_0)$. (Η τιμή εξαρτάται μόνο από το σημείο(x_0,t_0) και κατάλληλες παραστάσεις των συναρτήσεων f,g.)

7. Έστω $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ ανοικτό, συνεκτικό και $u\in\mathbf{C}^2(\Omega)$ λύση του

$$\Delta u(x)+u(x)=0,\quad x\in\Omega.\quad (\star)$$

α) Αποδείξτε ότι η λύση u έχει την εξής ιδιότητα

$$u(x)\ =\ \frac{1}{4\pi(\sin\rho-\rho\cos\rho)}\int_{B(x,\rho)}u(y)\,dy\ ,\quad 0<\rho<\pi,\quad B(x,\rho)\subset\Omega.$$

β) Αποδείξτε ανισότητα Harnack για τις μη αρνητικές λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης. Ειδικότερα αν $K\subset\subset\Omega$, τότε υπάρχει θετική σταθερά c_{ρ_0} που εξαρτάται μόνο από το $0<\rho_0=distance(K,\partial\Omega)$, ώστε για κάθε μη αρνητική λύση $u\in\mathbf{C}^2(\Omega)$ της $(\star)$ να ισχύει

$$u(y)\geq c_{\rho_0}u(x),\quad \forall x,y\in K.$$

8. α) Έστω $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ και $\overrightarrow{g}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Αποδείξτε πως ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το σύστημα

$$(\star\star)\quad \begin{aligned} div\,\overrightarrow{u}(x) &= f(x),\quad x\in\mathbf{R}^3,\\ curl\,\overrightarrow{u}(x) &= \overrightarrow{g}(x),\quad x\in\mathbf{R}^3,\\ \lim_{|x|\to+\infty}\overrightarrow{u}(x) &= 0, \end{aligned}$$

λύση $\overrightarrow{u}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ είναι

$$div\,\overrightarrow{g}(x)\ =\ 0,\quad \forall\ x\ \in\mathbf{R}^3.$$

Ποιά είναι τότε η λύση του $(\star\star)$; Ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων;

β) Έστω $f : \mathbf{R}^3 \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ και $\overrightarrow{g} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Εαν επιπρόσθετα η $\overrightarrow{g}$ ικανοποιεί

$$div\ \overrightarrow{g}(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^3,$$

αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_t(x,t) &= \Delta_x \overrightarrow{u}(x,t) - \nabla_x\, p(x,t) + \nabla_x\, f(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^3, \ \ t > 0,\\
div\ \overrightarrow{u}(x,t) &= 0,\\
\overrightarrow{u}(x,0) &= \overrightarrow{g}(x), \quad x \in \mathbf{R}^3,\\
\lim_{|x|\to+\infty} \overrightarrow{u}(x,t) &= 0,
\end{aligned}$$

έχει ομαλή λύση

$$\overrightarrow{u} : \mathbf{R}^3 \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}^3, \quad p : \mathbf{R}^3 \times [0,+\infty) \to \mathbf{R},$$

την οποία και να προσδιορίστε.

γ) Έστω $\overrightarrow{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ομαλή συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Αποδείξτε πως υπάρχουν συναρτήσεις $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ και $\overrightarrow{B} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(x) &= \nabla\phi(x) + \overrightarrow{B}(x), \quad x \in \mathbf{R}^3,\\
div\ \overrightarrow{B}(x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^3,\\
\lim_{|x|\to+\infty} \phi(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Προσδιορίστε ειδικότερα μια τέτοια συνάρτηση ϕ σαν συνάρτηση της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$. Αποδείξτε επιπρόσθετα ότι υπάρχει θετική σταθερά c ώστε η ϕ να ικανοποιεί

$$|x||\phi(x)| \le c, \quad |x| \ge 1,$$
$$|x|^2|\nabla\ \phi(x)| \le c, \quad |x| \ge 1$$

Αποδείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε

$$\overrightarrow{B}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{curl\ curl\ \overrightarrow{f}(y)}{|x-y|}\, dy, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

δ) Αποδείξτε το μονοσήμαντο της διάσπασης του γ). Ειδικότερα δοθείσης της ομαλής συνάρτησης $\overrightarrow{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ με συμπαγή φορέα, τότε υπάρχει το πολύ ένα ζευγάρι συναρτήσεων

$$\phi \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^3), \quad \overrightarrow{B} \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^3),$$

ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(x) &= \nabla\phi(x) + \overrightarrow{B}(x), \quad x \in \mathbf{R}^3,\\
div\ \overrightarrow{B}(x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^3,\\
\lim_{|x|\to+\infty} \phi(x) &= 0.
\end{aligned}$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>