

Πέμπτη 6 Νοεμβρίου 2014

A. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 7

1). Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές :

$$\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n(n+1)}.$$

$$\gamma) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

$$\delta) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^{3/2}}.$$

2). α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

είναι φθίνουσα

β) Δίνεται ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Αποδείξτε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0.$$

γ) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{(-1)^n}{n}$$

συγκλίνει.

3). Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ με μη αρνητικούς όρους είναι τέτοια ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

να συγκλίνει.

α) Αποδείξτε ότι και σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$$

συγκλίνει.

β) Αποδείξτε ότι και σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$$

συγκλίνει επίσης.

4).α) Δίνεται η φθίνουσα συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ Αποδείξτε αρχικά ότι ισχύει

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} f(2^k) \leq \int_1^{2^n} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} f(2^{k-1})$$

Υπόδειξη: $\int_1^{2^n} f(x) dx = \int_0^n f(2^y) 2^y \ln 2 dy$.

Συμπεράνατε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ υπάρχει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1}).$$

β) Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ φθίνουσα με μη αρνητικούς όρους και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο

$$f(x) = a_n, \quad n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει:

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^k} \leq \int_1^{2^n} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

Συμπεράνατε το κριτήριο συμπίκνωσης για τη σειρά της $\{a_n\}$ Δηλ. η σειρά

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$$\sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$$

συγκλίνει.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!