

ଅଟେ :

$$e^{-t} f'(t) \leq e^{-t} f(t), \quad t > 0 \quad \Leftrightarrow$$

Satz 2.2.2. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in t_0 stetig ist. Dann gilt:

iii. Erwartung $f(t) \leq 0, \quad t \geq 0$.

$$= e^x f(y)$$

$$\varphi_{yy}(x,y) = e^x f''(y).$$

~~$$e^x f(y) + e^x f''(y) = e^x f(y) = , x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$~~

Offene $f'(y) = 0, y \in \mathbb{R}$ ist ein Nullvektor

Υπόχρον σταδίου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ work

$$f(y) = c_1 y + c_2, \quad y \in \mathbb{R}$$

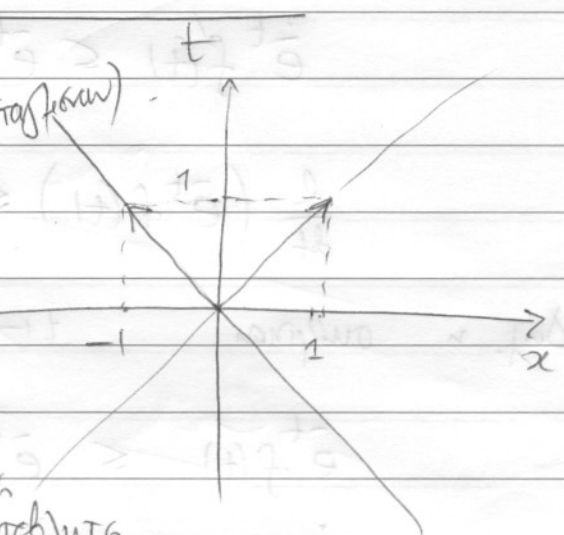
Ας οι $\int$ υποθέσει δική σου την f (1)

$$e^x (c_1 y + c_2), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) 1ος Τρόπος: (Αλλαγή συντεταγμένων) (2)

Εμφανίζουμε τον u_0
 $u_t + u_x$ σαν κατανομή
παραμορφωμένη, στη κατάσταση $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



από αυτό προκύπτει η ξ μεταβλητή

$$\begin{aligned} \xi &= x - t \\ \eta &= x + t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t &= \frac{1}{2}(\eta - \xi) \end{aligned}$$

και $u(x, t) = U(\xi, \eta)$

Η διαφορική εξίσωση θα φέρει, αφού αντικαταστήσουμε πρώτα (εφαρμόζουμε ο κανόνας της αλυσίδας)

$$u_t(x, t) = -U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= -U_\xi(\xi, \eta) + U_\eta(\xi, \eta)$$

$$u_x(x, t) = U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= U_\xi(\xi, \eta) + U_\eta(\xi, \eta)$$

Οπότε :

(3)

$$u_t + u_x = 2 \Leftrightarrow$$

$$-U_{\xi} + U_{\eta} + U_{\xi} + U_{\eta} = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 U_{\eta}(\xi, \eta) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (U(\xi, \eta) - \eta) = 0.$$

Το χωρίο αν ξ/η $\eta > \xi$ $t > 0 \Leftrightarrow$

και η αρχικά αυξάνει για $t=0 \Leftrightarrow \eta = \xi$

$$u(x, 0) = U(\xi, \xi) \Leftrightarrow U(\xi, \xi) = x^2 = \xi^2$$

Επομένως

$$U(\xi, \eta) - \eta = U(\xi, \xi) - \xi, \quad \eta > \xi.$$

$$= \xi^2 - \xi, \quad \eta > \xi$$

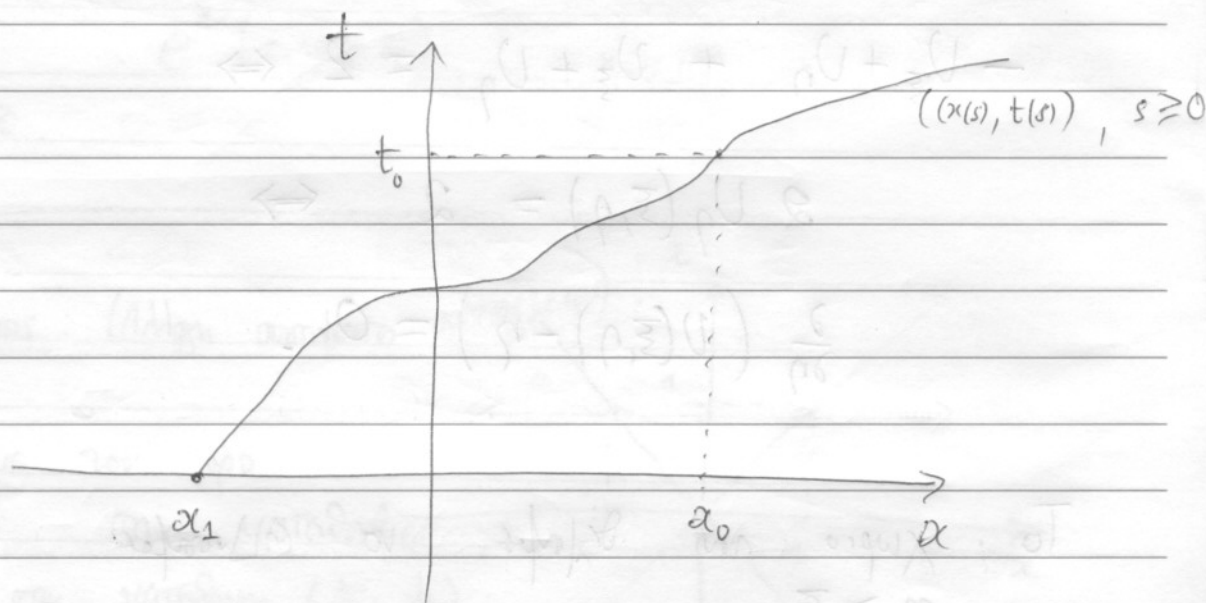
$$\text{Οπότε } U(\xi, \eta) = \eta - \xi + \xi^2, \quad \eta > \xi.$$

Στο αρχικό αυστηρά:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(\xi, \eta) = \eta - \xi + \xi^2 = (x+t) - (x-t) + (x-t)^2 \\ &= 2t + (x-t)^2, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned}$$

④

2ος Τρόπος: Η μέθοδος αλλαγών συντεταγμένων έχει πε-
ριορισμένη εφαρμοσιμότητα. Αντι αυτή συνοψίζεται ίσχυ-
ρα να πως να βρούμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπών.



Στόχος να βρούμε την χαρακτηριστική καμπή $(x(s), t(s))$, $s \geq 0$
η οποία διέρχεται από το (x_0, t_0) που θέλουμε να βρούμε
τη λύση, για την τιμή της παραμέτρου $s = \bar{s}$, δηλ. $x(\bar{s}) = x_0$, $t(\bar{s}) = t_0$
Οπότε εύκολα διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο των αρχικών
δεδομένων (στη περίπτωση μας $t = 0$), δηλ.

$$x(0) = x_1, \quad t(0) = 0.$$

Η επιλογή της χαρακτηριστικής καμπής γίνεται με τέτοιο
τρόπο ώστε όταν παραγωγίσουμε την λύση ~~επεί~~ πάνω στην
χαρακτηριστική καμπή η παραγωγισμένη να ~~είναι~~ αυξανόμενη
των Δ.Ε., δηλ. έχουμε

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x(x(s), t(s)) \underbrace{x'(s)} + u_t(x(s), t(s)) \underbrace{t'(s)}$$

και η εξίσωση μας δίνει

$$u_x + u_t = 2$$

Επιλέγουμε την κατάσταση $s=0$:

$$x'(s) = 1, \quad s > 0$$

$$t'(s) = 1, \quad s > 0$$

$$x(0) = x_1$$

$$t(0) = 0$$

Οπότε έχουμε: $x(s) = s + x_1, \quad t(s) = s, \quad s \geq 0$

Αν θεωρούμε $\sigma(s) = u(x(s), t(s)) = u(s + x_1, s), \quad s > 0$

Τότε, $\sigma'(s) = u_x + u_t = 2 \quad (\text{από την Δ.Ε.})$

Οπότε $\sigma(0) = u(x_1, 0) = x_1^2$

Οπότε $\sigma(s) = 2s + \sigma(0) = 2s + x_1^2, \quad s \geq 0$

Εντά. $u(s + x_1, s) = 2s + x_1^2, \quad s \geq 0$

Οπότε από την κατάσταση $x(\bar{s}) = x_0, \quad t(\bar{s}) = t_0$, έχουμε

$$\bar{s} + x_1 = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - t_0$$

$$\bar{s} = t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{s} = t_0$$

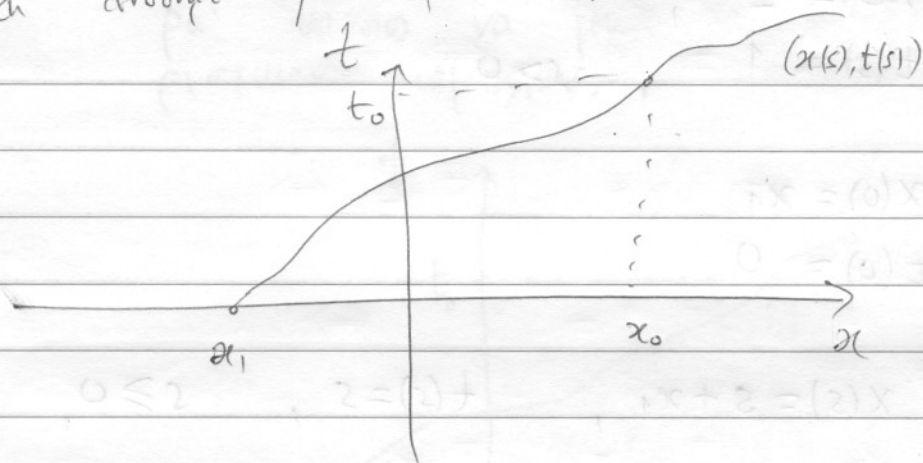
Οπότε $u(\bar{s} + x_1, \bar{s}) = 2\bar{s} + x_1^2 \Leftrightarrow$

$$u(x_0, t_0) = 2t_0 + (x_0 - t_0)^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0$$

Το Γινόμενο.

6) Η άσκηση αφορά να δοθεί και να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών στο σημείο 3.

Ορίστε την λύση του προβλήματος με την εξίσωση $\sigma(s)$.



$$\sigma(s) = u(x(s), t(s)) \quad , \quad s > 0 \Rightarrow$$

$$\sigma'(s) = u_x x'(s) + u_t t'(s)$$

Επειδή ορίζεται

$$x'(s) = 1$$

$$t'(s) = 1$$

$$x(0) = x_1$$

$$t(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = s + x_1, \quad s \geq 0, \quad t(s) = s.$$

και με Δ.Ε.

έπεται

$$\begin{aligned} \sigma'(s) &= u_x + u_t = u^2(x(s), t(s)) \quad , \quad s > 0 \\ &= \sigma^2(s), \end{aligned}$$

με

$$\sigma(0) = u(x_1, 0) = 1 \quad , \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

και ενδεχόμενα

δίνεται

$$\sigma'(s) = \sigma^2(s), \quad s > 0$$

$$\sigma(0) = 1$$

να είναι να διασφαλιστεί ότι ο σ θα βρίσκεται, όπως

(7)

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{\sigma(s)} \right) = 1, \quad s > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{\sigma(s)} - s \right) = 0, \quad s > 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\sigma(s)} - s = -\frac{1}{\sigma(0)} - 0 = -1, \quad s > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma(s)} = 1 - s,$$

After graph on interval $s < 1$

and we have $\sigma(s) = \frac{1}{1-s}, \quad 0 < s < 1$

And

$$u(s+x_1, s) = \frac{1}{1-s}, \quad 0 < s < 1$$

A

$$\begin{array}{l|l} \bar{s} + x_1 = x_0 & x_1 = x_0 - t_0 \\ \bar{s} = t_0 & \bar{s} = t_0 \end{array} \quad (\Rightarrow)$$

Optimal

$$u(\bar{s} + x_1, \bar{s}) = \frac{1}{1-\bar{s}} \Leftrightarrow$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{1-t_0}, \quad t_0 < 1$$

