

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 2

1). Να λυθεί το πρόβλημα

$$\sqrt{1-x^2} u_x(x, y) + u_y(x, y) = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad y \in \mathbb{R},$$

$$u(0, y) = y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

2). Να λυθεί το πρόβλημα

$$u_x(x, y) + (x + y) u_y(x, y) = 0, \quad x + y > 1,$$

$$u(x, 1 - x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

3). α) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt}(x, t) - u_{xt}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$u_{tt}(x, t) - u_{xt}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x, -x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

δεν έχει ομαλή λύση.

4). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$2u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) + u_{xt}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 8 Μαρτίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 8 Μαρτίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

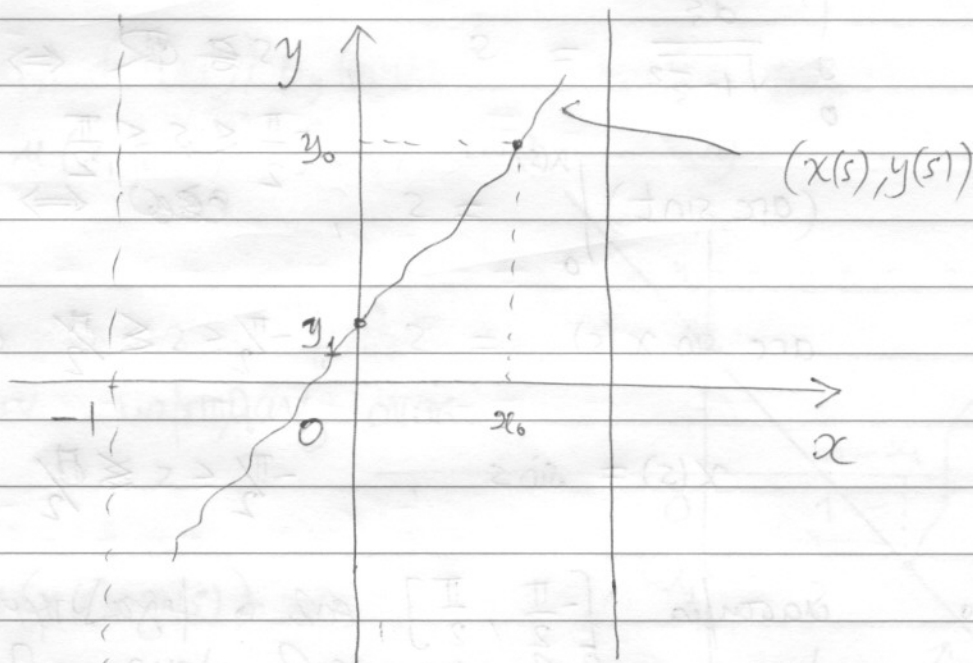
MΔΕ

ΑΥΣΕΙΣ

1)

$$\sqrt{1-x^2} u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0, \quad x \in (-1,1), y \in \mathbb{R}$$

$$u(0,y) = y, \quad y \in \mathbb{R}$$



Ο2 εφαρμόζουμε την μέθοδο των χαρακτηριστικών, όπου επιγράφει ως χαρακτηριστική καμπύλη:

$$\sigma(s) = u(x(s), y(s)), \quad s \in \mathbb{R}$$

 $\Rightarrow$

$$\sigma'(s) = u_x x'(s) + u_y y'(s)$$

$$x'(s) = \sqrt{1-x^2(s)}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$y'(s) = 1, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_1$$

Οπότε $y(s) = s + y_1$, $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{x'(s)}{\sqrt{1-x^2(s)}} = 1, \quad s \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\int_0^s \frac{x'(\tau)}{\sqrt{1-x^2(\tau)}} d\tau = s, \quad s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$x(s) \quad x(\tau) = \xi \Rightarrow x'(\tau) d\tau = d\xi$$

$$\int_0^s \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = s, \quad s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(\arcsin) \Big|_0^{x(s)} = s, \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\arcsin x(s) = s, \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$x(s) = \sin s, \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$

(Το διαστήμα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι το μεγαλύτερο διάστημα που η άνω ορίσθηκε και είναι γινόμενο αλφάτα).

και για $s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ το $\sin s$ λαμβάνει όλες τις τιμές z της $[-1, 1]$.

Επομένως $x(s) = \sin s$, $y(s) = s + y_1$.

Τότε

$$\sigma(s) = 0, \quad s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\sigma(s) = \sigma(0) = u(x(0), y(0)) = u(0, y_1) = y_1,$$

$$u(\sin s, s+y_1) = y_1, \quad s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Αν για } s = \bar{s} \in \chi \cup \chi^c \quad \sin \bar{s} = x_0 \quad \left| \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{s} = \arcsin x_0 \\ \bar{s} + y_1 = y_0 \end{cases} \right. \quad y_1 = y_0 - \arcsin x_0$$

και έτσι

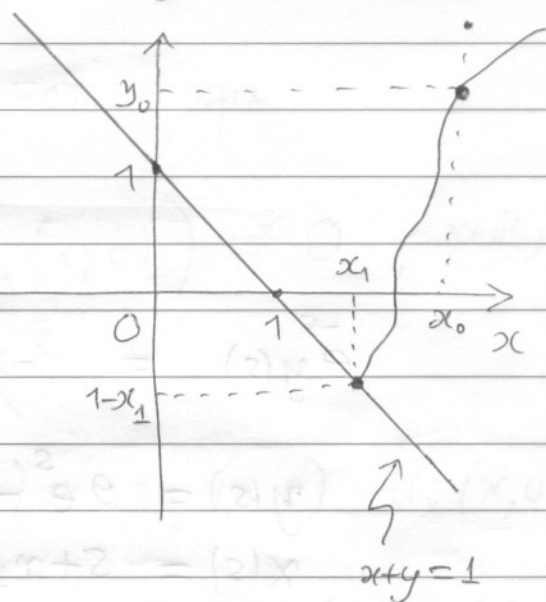
$$u(x_0, y_0) = u(\sin \bar{s}, \bar{s} + y_1) = y_1 = y_0 - \arcsin x_0$$

$$\text{Οπότε, } u(x, y) = y - \arcsin x, \quad x \in (-1, 1), y \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad u_x(x, y) + (x+y)u_y(x, y) = 0, \quad x+y > 1$$

$$u(x, 1-x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Οι εφαπτομένες τη φέρουσα των χαρακτηριστικών καμπύλων, όπως είναι



$$\sigma(s) = u(x(s), y(s)) \Rightarrow$$

$$\sigma'(s) = u_x x'(s) + u_y y'(s)$$

Οπότε επιλέγουμε:

$$x'(s) = 1, \quad s > 0$$

$$y'(s) = x(s) + y(s), \quad s > 0$$

$$x(0) = x_1$$

$$y(0) = 1 - x_1$$

$$\text{Επομένως } x(s) = s + x_1, \quad s \geq 0$$

$$y'(s) = y(s) + s + x_1, \quad s \geq 0$$

$$e^{-s} y'(s) - e^{-s} y(s) = e^{-s} (s + x_1), \quad s \geq 0$$

$$\frac{d}{ds} (e^{-s} y(s)) = e^{-s} (s + x_1), \quad s \geq 0 \Rightarrow$$

$$e^{-s} y(s) - y(0) = \int_0^s e^{-\xi} (\xi + x_1) d\xi, \quad s \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-s} y(s) - (1 - x_1) = \int_0^s (-e^{-\xi})' (\xi + x_1) d\xi$$

$$= \left((-e^{-\xi}) (\xi + x_1) \right) \Big|_0^s - \int_0^s (-e^{-\xi}) d\xi$$

$$= -e^{-s} (s + x_1) + x_1 + (-e^{-\xi}) \Big|_0^s$$

$$= -e^{-s} (s + x_1) + x_1 - e^{-s} + 1, \quad s \geq 0$$

$$e^{-s} y(s) = 1 - x_1 - e^{-s} (s + x_1) + x_1 + 1 - e^{-s}$$

$$y(s) = 2e^s - 1 - (s + x_1), \quad s \geq 0$$

$$x(s) = s + x_1$$

$$T_{\text{ne}} \quad \sigma'(s) = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(s) = \sigma(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_1, 1 - x_1) \\ = f(x_1).$$

$$O_{\text{ne}} \quad u(s + x_1, 2e^s - 1 - s - x_1) = f(x_1)$$

Οπότε αν

$$x(\bar{s}) = x_0$$

$$y(\bar{s}) = y_0$$

22 έχουμε

$$\bar{s} + x_1 = x_0$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{s} = \ln\left(\frac{1+x_0+y_0}{2}\right)$$

$$2e^{\bar{s}} - 1 - \bar{s} - x_1 = y_0$$

$$x_1 = x_0 - \ln\left(\frac{1+x_0+y_0}{2}\right)$$

και Εμφαν

$$u(x_0, y_0) = f\left(x_0 - \ln\left(\frac{1+x_0+y_0}{2}\right)\right), \quad x_0+y_0 \geq 1.$$

3) α) Παράτηρανε αρχικά ότι έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_t(x, t) - u_x(x, t)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Οπότε για $t > 0$

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0)$$

$$\text{Οπότε } u_t(x, 0) = g(x) \text{ και επειδή } u(x, 0) = f(x)$$

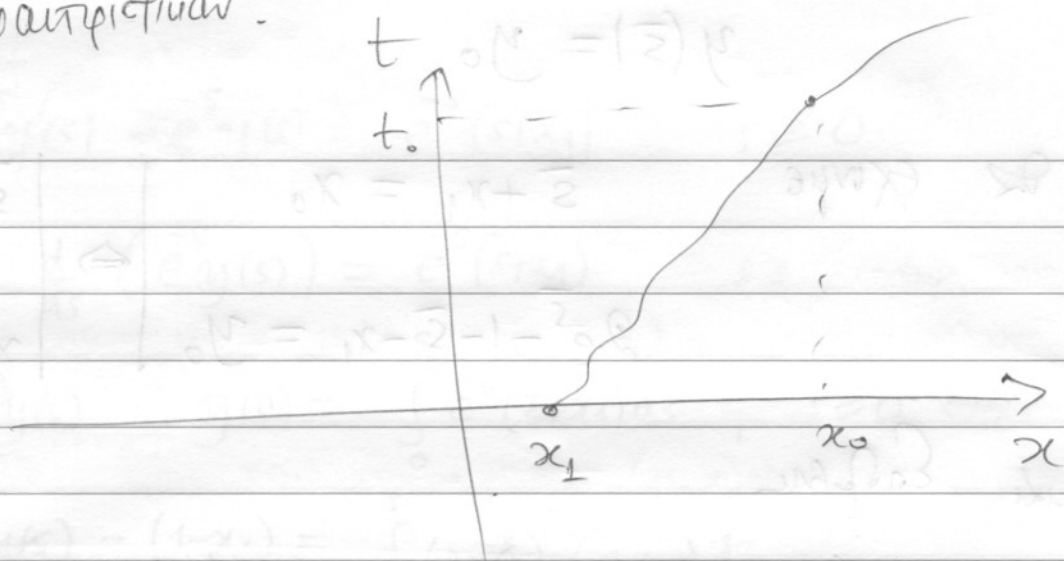
$$\Rightarrow u_x(x, 0) = f'(x).$$

Οπότε Εμφανως Παράτηρανε το πρόβλημα

$$u_t - u_x = g(x) - f'(x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Το οποίο είναι το άνω άκρο της 2ης μεθόδου
 των χαρακτηριστικών.



⇒ Ομοίως επιλέγουμε

$$t'(s) = 1 \quad s > 0$$

$$x'(s) = -1, \quad s > 0$$

$$t(0) = 0$$

$$x(0) = x_1$$

$$\Rightarrow t(s) = s, \quad x(s) = -s + x_1, \quad s \geq 0,$$

$$\text{Τότε} \quad \sigma'(s) = u_x x' + u_t t' \quad (\Delta.E.)$$

$$= u_t - u = g(x(s)) - f'(x(s))$$

$$\sigma'(s) = g(-s + x_1) - f'(-s + x_1), \quad s \geq 0$$

$$\Rightarrow \sigma(s) - \sigma(0) = \int_0^s [g(-\theta + x_1) - f'(-\theta + x_1)] d\theta$$

(7)

$$u(s) = (u(x_1, 0) =) f(x_1) + \int_0^s [g(-\theta + x_1) - f'(-\theta + x_1)] d\theta$$

$$= f(x_1) + \int_{x_1}^{-s+x_1} [g(\xi) - f'(\xi)] (-d\xi)$$

$$= f(x_1) - \int_{x_1}^{-s+x_1} g(\xi) d\xi + \int_{x_1}^{-s+x_1} f'(\xi) d\xi$$

$$= \cancel{f(x_1)} - \int_{x_1}^{-s+x_1} g(\xi) d\xi + \cancel{f(-s+x_1) - f(x_1)}$$

$$= f(-s+x_1) - \int_{x_1}^{-s+x_1} g(\xi) d\xi, \quad s > 0.$$

On the other hand

$$u(-s+x_1, s) = f(-s+x_1) - \int_{x_1}^{-s+x_1} g(\xi) d\xi.$$

At: $x(\bar{s}) = x_0, \quad t(\bar{s}) = t_0 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\bar{s} + x_1 = x_0 \\ \bar{s} = t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + t_0 \\ \bar{s} = t_0 \end{cases}$$

and in turn find

$$u(x_0, t_0) = f(-\bar{s} + x_1) - \int_{x_1}^{-\bar{s} + x_1} g(\xi) d\xi = f(x_0) - \int_{x_0 + t_0}^{x_0} g(\xi) d\xi.$$

b) Έαν το πρόβλημα έχει λύση, τότε
προσδιορίζεται την

$$u_t(x, -x) = x$$

ως προς x , να πάρουμε από την συνθήκη
την αλυσίδα, ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t(x, -x)) = 1, \Leftrightarrow$$

$$u_{tx}(x, -x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) + u_{tt}(x, -x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow u_{tx}(x, -x) - u_{tt}(x, -x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Όπου από την Δ.Ε. για $t = -x$ θα
επρέπε να ισχύει ένα

$$u_{tt}(x, -x) - u_{xt}(x, -x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 = 0$$

απο το αρα $0 \neq -1$.

4) Επειδή $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, η τριωνομική
είναι υποβλητική, οπότε θα βρούμε
την χαρακτηριστική ισοτιμία, είτε θα αβκίμω
το αποτέλεσμα σαν ψευδές

9

$$\xi = \alpha t + \beta x$$

$$\eta = \gamma t + \delta x$$

(η X ξ pair) - η ξ η ξ

$$2\rho^2 + \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xi = -t + x$$

$$\eta = x + 2t$$

$$\frac{t}{x} = +1 \Leftrightarrow -t + x = 0$$

$$\frac{t}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 2t = 0$$

η ξ η ξ

$$u(x, t) = U(\xi, \eta)$$

$$u_x = U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \beta U_\xi + \delta U_\eta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{xx} &= \beta \left(U_{\xi\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \delta \left(U_{\eta\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\eta\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{xt} &= \beta \left(U_{\xi\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \delta \left(U_{\eta\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_{\eta\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \\ &= \alpha\beta U_{\xi\xi} + \gamma\beta U_{\xi\eta} + \alpha\delta U_{\eta\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta} \\ &= \alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta + \beta\gamma) U_{\xi\eta} + \gamma\delta U_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$u_t = U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = \alpha U_\xi + \gamma U_\eta$$

$$u_{tt} = \alpha \left(U_{\xi\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \gamma \left(U_{\eta\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_{\eta\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$$

$$= a^2 U_{\xi\xi} + 2a\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}$$

(10)

με ΔE γραφεται:

$$2(\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}) - (a^2 U_{\xi\xi} + 2a\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta})$$

$$+ a\beta U_{\xi\xi} + (a\delta + \beta\gamma) U_{\xi\eta} + \gamma\delta U_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\beta^2 + a\beta - a^2) U_{\xi\xi} + 2(2\beta\delta - a\gamma + a\delta + \beta\gamma) U_{\xi\eta} + (2\delta^2 + \gamma\delta - \gamma^2) U_{\eta\eta} = 0.$$

$$0 \text{ στοιχος ειδη} \quad 2\beta^2 + a\beta - a^2 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \frac{\beta}{a} - 1 = 0$$

$$2\delta^2 + \gamma\delta - \gamma^2 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 + \frac{\delta}{\gamma} - 1 = 0$$

$$\text{με} \quad 2\beta\delta - a\gamma + a\delta + \beta\gamma \neq 0$$

$$\text{και επισης} \quad \frac{\beta}{a} = -1, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Η επιση} \quad \xi = x - t$$

$$\eta = x + 2t$$

μετασχηματισμοι με ΔE σε

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \eta} = 0 \quad \text{με}$$

Ενδοφρεως

(11)

$$U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

για καταλληλές F, G .

και επιπλέον έχουμε

$$u(x, t) = F(x-t) + G(x+2t)$$

Όπου, όπως και

$$u(x, 0) = f(x) \Leftrightarrow F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(x, t) = -F'(x-t) + 2G'(x+2t)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \Leftrightarrow 2G'(x) - F'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\exists c \in \mathbb{R} / \begin{array}{|l|l|} 2G(x) - F(x) = c & F(x) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{c}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|l|} G(x) + F(x) = f(x) & G(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{c}{3} \end{array}$$

και Τέλος έχουμε

$$u(x, t) = \frac{2}{3}f(x-t) - \frac{c}{3} + \frac{1}{3}f(x+2t) + \frac{c}{3}$$

$$= \frac{2}{3}f(x-t) + \frac{1}{3}f(x+2t) \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$