

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 8

1). Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, \pi) \\ 1, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σειρά *Fourier* της f .

(β) Με χρήση του πρώτου ερωτήματος βρείτε το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x - \pi, \quad x \in [0, 2\pi).$$

(α) Να βρεθεί η σειρά *Fourier* της f .(β) Με χρήση της ταυτότητας του *Parseval* βρείτε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(γ) Χωρίς τη χρήση της ταυτότητας του *Parseval* βρείτε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

3). Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση της οποίας η σειρά *Fourier* αυτής είναι

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Βρείτε τη σειρά *Fourier* της f'' (με χρήση των συντελεστών της σειράς *Fourier* της f).4). Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

Με χρήση της ταυτότητας του *Parseval* αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx.$$

Υπενθύμιση Για

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Η ανισότητα *Bessel* είναι

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

ενώ η ταυτότητα *Parseval*

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Τρίτη 22 Μαΐου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 15:00 της Τρίτης 22 Μαΐου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

1) Итого Фурье z_n f $\sin$ $\cos$ π

(a)
$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

тогда
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kx f(x) dx, \quad k=0,1,2, \dots$$

и
$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k=1,2, \dots$$

тогда $k=0$, $\sin$ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 1$

тогда $k=1,2, \dots$ $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{\sin kx}{k} \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin kx}{k} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{\pi k} \left(\underbrace{\sin 2k\pi}_0 - \underbrace{\sin k\pi}_0 \right) = 0.$$

тогда $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right)' dx = \frac{1}{k\pi} \left(-\cos 2k\pi + \cos k\pi \right)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left(-1 + (-1)^k \right).$$

тогда $k=2m$ $\beta_{2m}=0$, $k=2m-1$, $m \in \mathbb{N}$

$$\beta_{2m-1} = -\frac{2}{(2m-1)\pi}.$$

$$1 - 2^{-} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1}$$

(β). Η ανάρτηση f ανήκει στην C^1 ουσία
οπότε

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Ειδικότερα για $x \in (0, \pi)$ δίνει:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1} = \frac{\pi}{4}$$

(από το διάστημα $(\pi, 2\pi)$ παίρνουμε για οποιαδήποτε x , γιατί)

αν επιλέξουμε $x = \frac{\pi}{4}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin\left((2m-1)\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{i) αν } m=2\ell \Rightarrow \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\ell\pi) = 0$$

$$\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\ell\pi) = (-1)^{\ell}$$

$$\text{και από } \sin\left((2m-1)\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{\ell+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) αν } m=2\ell-1 &\Rightarrow \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\ell\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\ell\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\ell\pi)\sin\frac{\pi}{2} \\ &= (-1)^{\ell+1} \end{aligned}$$

$$\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left((2m-1)\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1)^{\ell+1}$$

$$-\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$a) f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

Exakte $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) dx$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} - \pi x \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{2} - 2\pi^2 \right)$$

$$= 0.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} x \cos kx dx - \pi \int_0^{2\pi} \cos kx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} x \left(\frac{\sin kx}{k} \right)' dx - \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin kx}{k} \right)' dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{x \sin kx}{k} \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2\pi \sin 2k\pi}{k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} x \sin kx dx - \pi \int_0^{2\pi} \sin kx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \left(\frac{-\cos kx}{k} \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(x \left(\frac{-\cos kx}{k} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-2\pi \frac{\cos 2k\pi}{k} \right) = -\frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

0 note

$$f \sim -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

4

(β) H τωζωμR τω Parseval εινε

$$\left(\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \right)$$

οχι :

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

Αρα η υμμετρικη εινε $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx =$

$$= \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx = \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + \pi^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + \pi^2 x \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{(2\pi)^3}{3} - \pi \cdot (2\pi)^2 + \pi^2 \cdot 2\pi = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi^3 + 2\pi^3$$

$$= \frac{8\pi^3}{3} - 2\pi^3 = \frac{2\pi^3}{3}$$

η Εηδ. εινε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

5)

3) Η συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R})$ - 2π περιόδου,

Τότε υπάρχει f'' είναι 2π περίοδος, οπότε

έχει ~~απλά~~ σειρά Fourier.

$$\text{Έστω } f''(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

$$\text{Έστω } f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

ο σόχος είναι να συσχετίσουμε τις δύο σειρές Fourier.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f''(x) dx = \frac{1}{\pi} (f'(x)) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} (f'(2\pi) - f'(0)) = 0 \end{aligned}$$

(Οπότε f 2π περίοδος & $C^1 \Rightarrow f'$ είναι 2π περίοδος)

$$(f(x+2\pi) = f(x) \Rightarrow f'(x+2\pi) = f'(x))$$

Είναι

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f''(x) \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{(f'(x) \cos kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) (-k \sin kx) dx \right]$$

$$= \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin kx dx \stackrel{\text{αγωγής με μέρη}}{=} \frac{k}{\pi} \left[\underbrace{(f(x) \sin kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) k \cos kx dx \right]$$

$$- \int_0^{2\pi} f(x) k \cos kx dx =$$

$$= - \frac{k^2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Περίοδος

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{(f'(x) \sin kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - k \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx dx \right]$$

$$= - \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx dx$$

$$= - \frac{k}{\pi} \left[\underbrace{(f(x) \cos kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) (-k \sin kx) dx \right]$$

$$= - \frac{k^2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

$$= -k^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

$$= -k^2 b_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Οπότε τελικά $f'' \sim - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \sin kx$.

7) Έστω $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$

Τότε $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, αν. zw. μηδέν.

ακόη $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$

$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$, $k \in \mathbb{N}$.

Η ταυτότητα του Parseval για την f δίνει

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + \beta_k^2) \right) = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

$$\Rightarrow \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + \beta_k^2) = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx. \quad (1)$$

Στη συνέχεια θα πάρει zw. ορια Fourier zw. f'

Έστω $f' \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$.

(f' συνεχ.)

Τότε $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0$.

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{(f(x) \cos kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) (-k \sin kx) dx \right]$$

$$8) \quad A_k = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$= k \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Продолжен

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin kx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{(f(x) \sin kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) k \cos kx \, dx \right]$$

$$= -k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$= -k a_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

И закон Рундара для f' див:

$$\pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) \right) = \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$$

Дитот

$$\int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 a_k^2 + k^2 \beta_k^2)$$

$$\geq \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + \beta_k^2) = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx.$$