

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 24 Φεβρουαρίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 1

1). Να λυθεί το ΠΑΤ (πρόβλημα Cauchy)

$$\begin{aligned} 2u_t(x,t) + t\, u_x(x,t) &= x\, u(x,t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

όπου $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι δοθείσα ομαλή συνάρτηση. Πόσο ομαλή πρέπει να είναι η f ώστε να υπάρχει κλασική λύση;

2). Έστω οι συναρτήσεις $A, B : [a,b] \to \mathbf{R}$ και $C, D : [c,d] \to \mathbf{R}$ για τις οποίες υπάρχουν $x_0 \in [a,b]$ και $y_0 \in [c,d]$ τέτοια ώστε $B(x_0) \neq 0,\ C(y_0) \neq 0$. Εαν επιπρόσθετα ισχύει

$$A(x)C(y) + B(x)D(y) = 0, \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y \in [c,d],$$

τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε

$$A(x) = \lambda B(x),\ \forall x \in [a,b], \quad \& \quad D(y) = -\lambda C(y),\ \forall y \in [c,d].$$

3). α) Να βρεθεί η γενική λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u_x(\pi,t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

β) Να βρεθεί η γενική λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,t) & \quad \text{φραγμένη}. \end{aligned}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!