ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 17 Μαρτίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

# ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 4

**1**). Δίνεται το πρόβλημα Cauchy

$$2u_{xx}(x,t) + 3u_{xt}(x,t) + u_{tt}(x,t) = F(x,t), \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbf{R},$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $F : \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

α) Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος.

β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.

**2**). Δίνεται το πρόβλημα Cauchy

$$u_{xx}(x,t) - 2\sin x\ u_{xt}(x,t) - \cos^2 x\ u_{tt}(x,t) - \cos x\ u_t(x,t) = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbf{R},$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

α) Βρείτε διανυσματικό πεδίο $P, Q$ της μορφής

$$Q(x,t) = u_x(x,t) + a(x)u_t(x,t), \quad P(x,t) = b(x)u_x(x,t) + c(x)\ u_t(x,t)$$

ώστε να ισχύει

$$Q_x(x,t) - P_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 2\sin x\ u_{xt}(x,t) - \cos^2 x\ u_{tt}(x,t) - \cos x\ u_t(x,t).$$

β) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\phi, \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπους

$$\phi(x) = \cos x + x,\ x \in \mathbf{R}, \quad \psi(x) = \cos x - x,\ x \in \mathbf{R},$$

είναι γνήσια μονότονες και επί.

γ) Για $x_0 \in \mathbf{R},\ t_0 > 0$, υποθέτουμε $x_1 = x_1(x_0, t_0)$ $x_2 = x_2(x_0, t_0)$ είναι οι λύσεις των εξισώσεων (αντίστοιχα)

$$\cos x + x = \cos x_0 + x_0 - t_0, \quad \cos x - x = \cos x_0 - x_0 - t_0.$$

Αποδείξτε ότι

$$x_1 \ < \ x_0 \ < \ x_2.$$

δ) Με χρήση του θεωρήματος Green να βρεθεί η λύση του προβλήματος $u(x_0, t_0)$ συναρτήσει των $f, g, x_0, t_0, x_1, x_2$.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**