ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 24 Μαρτίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 5

1). Δίνεται το πρόβλημα Cauchy

$$2u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t) = F(x,t), \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbf{R},$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $F : \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις.

α) Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος.

β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.

2). Δίνεται το πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), &\qquad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

α) Εαν $f(x) = x(1-x)(2+x),\ x \in [0,1]$, αποδείξτε ότι η λύση u ικανοποιεί

$$0 \leq u(x,t) \leq e^{-3t}\, x(1-x)(2+x), \quad 0 < x < 1,\ t > 0.$$

β) Εαν $f(x) = x(1-x),\ x \in [0,1]$, βρείτε $\lambda < 0$ ώστε η λύση u να ικανοποιεί

$$u(x,t) \leq e^{\lambda\, t}\, x(1-x) \quad 0 < x < 1,\ t > 0.$$

Υπόδειξη: Να γίνει χρήση της Αρχής του Μεγίστου.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!