ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 7 Απριλίου 2022 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 6

1). Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= F(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) &= g_1(t), \quad t \geq 0, \\ u(1,t) &= g_2(t), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,1], \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $F : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathbf{R},\ g_1, g_2 : [0,+\infty) \to \mathbf{R},\ f : [0,1] \to \mathbf{R}$ είναι ομαλές και το πρόβλημα έχει κλασική λύση.

2). Με κατάλληλη χρήση της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών, να βρεθεί η γενική λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \ \ t > 0, \ \ t < x < t + \pi, \\ u(t,t) &= 0, \ \ t \geq 0, \\ u(t+\pi,t) &= 0, \ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

3). Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος Cauchy

$$-2u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) + u_{tt}(x,t) = F(x,t), \ \ x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbf{R},$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $F : \mathbf{R} \times [0,+\infty)$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις. Στη συνέχεια αποδείξτε πως αν

$$f \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}),\ g \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}),\ F, F_x \in \mathbf{C}(\mathbf{R} \times [0,+\infty)),$$

η λύση είναι κλασική.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!