

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 14 Απριλίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 7

1). Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ανοικτό και φραγμένο και u κλασική λύση του

$$\begin{aligned} -u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) &= u^2(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι

$$u(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

2). Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ανοικτό και φραγμένο. Αποδείξτε την ύπαρξη το πολύ μιας κλασικής λύσης του προβλήματος

$$\begin{aligned} -u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) &= F(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $F,\ g$ είναι ομαλές ώστε το πρόβλημα να έχει λύση και ν είναι το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω του Ω διάνυσμα.

3). Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ανοικτό και φραγμένο και $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ συνάρτηση που ικανοποιεί

$$-u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) \leq 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Αποδείξτε ότι

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!