ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 13 Μαϊου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 8

1). Δίνεται η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f.
(β) Σε ποιά συνάρτηση συγκλίνει η σειρά Fourier της f;

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f.
(β) Βρείτε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

3). Έστω $f \in C^2(\mathbf{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier αυτής είναι

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Βρείτε τη σειρά Fourier της f'' (με χρήση τών συντελεστών της σειράς Fourier της f).

4). Έστω $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ είναι C^∞ είναι συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(\pi) = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Με χρήση της ταυτότητας του Parseval αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_0^\pi f^2(x)\, dx \le \int_0^\pi (f'(x))^2\, dx.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!