

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 6

1). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$u_{tt}(x, t) + 2u_t(x, t) - 4u_{xx}(x, t) + u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_x(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

2). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 > 1,$$

$$u = 1 + 3 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

 u φραγμένη.3). Βρείτε την αρμονική συνάρτηση u στο μισό δίσκο $r < 1$, $0 < \theta < \pi$, και τέτοια ώστε

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$u(1, \theta) = \pi \sin \theta - \sin 2\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

(Η u είναι σε πολικές συντεταγμένες.)

4). Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(1, t) + u_t(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

Προς τούτο αποδείξτε ότι κάποιο κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές αριθμήσιμες στο πλήθος που συμβολίζουμε με

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots.$$

Αποδείξτε επίσης ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι οι θετικές λύσεις της εξίσωσης

$$\tan \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

και ότι ικανοποιούν την ασυμπτωτική σχέση

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{k\pi} = 1.$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις.

Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος. Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k .

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 5 Απριλίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 5 Απριλίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!