Πέμπτη 17 Δεκεμβρίου 2009

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξεταστούν, ως προς τη συγκλισιμότητα οι ακολουθίες:

   (α′) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

   (β′) $(1 + \frac{1}{n})^{10} - 1$,

   (γ′) $(n + n^2)^{\frac{1}{n}}$,

   (δ′) $(-1)^{n+1}(1 + \frac{1}{n})$,

   (ε′) $(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$,

   (ϛ′) $(1 + \frac{1}{n})^{2n}$,

   (ζ′) $(1 + \frac{1}{n^2})^{n}$,

2. Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

   Αποδείξτε πως η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. Ποιό είναι το όριο αυτής;

3. (α′) Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$. Αποδείξτε πως η ακολουθία $x^n, n = 1, 2, \ldots$ είναι μηδενική ακολουθία.

   (β′) Έστω $\theta \in (0, 1)$ και ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει:

$$|b_{n+1}| \leq \theta |b_n|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

   Αποδείξτε πως η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική ακολουθία.

4. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

   Αποδείξτε πως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Υπόδειξη: Η ακολουθία $(a_n)_{n\in I\!N}$ δεν είναι μονότονη, όμως υπάρχουν δύο μονότονες υπακολουθίες αυτής.

5. Με τον ορισμό να προσδιορίστε τα όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 1}(x^2+1-\frac{2}{x}),\quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x-1}.$$

6. Να γίνει μία πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$, στο μέγιστο πεδίο ορισμού αυτής.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\infty)\to I\!R$ με τύπο

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}},\quad x>0.$$

Αποδείξτε πως η f δέχεται ένα ολικό μέγιστο(ποιό είναι;) Στη συνέχεια να γίνει μία πρόχειρη γραφική παράσταση αυτής. Υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$;

8. Βρείτε το τραπέζιο με το μεγαλύτερο εμβαδό που μπορεί να εγγραφεί σε ημικύκλιο ακτίνας α, με την μία βάση του πάνω στην διάμετρο.

9. Αποδείξτε πως (α′)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=1,$$

(β′) ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1},$$

δεν συγκλίνει.

10. Εστω $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πως υπάρχει $\xi\in[0,1]$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi)=1-\xi.$$

11.Εστω $f:[0,2]\to[0,1]$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ συνάρτηση. Αποδείξτε πως υπάρχει $\xi\in[0,2]$ ώστε

$$(\alpha')\quad f(\xi)=\frac{2-\xi}{2}.$$

Εάν επιπρόσθετα $f(0)=f(1)+\frac{1}{2}$, τότε αποδείξτε πως υπάρχει $\theta\in(0,2)$, ώστε να ισχύει

$$(\beta')\qquad f'(\theta)=-\frac{1}{2}.$$

Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

12. Έστω η συνάρτηση $f:[0,\infty)\to I\!R$ συνεχώς παραγωγίσιμη που είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$. Εάν είναι επιπρόσθετα $f(0)=0$ και

$$f''(x)>0,\quad x>0.$$

αποδείξτε τότε πως η συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,\infty)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, \infty) \to I\!R$ με τύπο $f(x) = \log(1+x)$. Αποδείξτε πως για $x > 0$, τα ακόλουθα ισχύουν:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

14. Για $p > 1$, να αποδείξτε τις ανισότητες:

$$(\alpha') \qquad x^p + (p-1) \geq \; px, \qquad x > 0.$$

$$(\beta') \quad x^p + (p-1)y^{\frac{p}{p-1}} \geq \; pxy, \quad x > 0, \; y > 0.$$

Για το (α′) να μην γίνει χρήση του (β′).

15. Να υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(\alpha') \quad \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\, dx,$$

$$(\beta') \qquad \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

$$(\gamma') \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\, dx.$$

16. Εστω $f : [0,1] \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Εάν επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 f(x)\, dx \; = \; 0,$$

αποδείξτε τότε ότι ισχύει

$$f(x) \; = \; 0, \; \forall x \in [0,1].$$

ΚΑΛΕΣ ΔΙΑΚΟΠΕΣ !!!