

Πέμπτη 18 Δεκεμβρίου 2014

A. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Υπόδειγμα διαγωνίσματος

Θέμα 1. α) Να βρεθούν (χωρίς απόδειξη) τα supremum και infimum των συνόλων

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{3x+1}{x+1}, \quad x > 2 \right\}.$$

β) Δώστε απόδειξη για το supremum και το infimum του συνόλου C .

Θέμα 2. α) Δοθέντος $\varepsilon > 0$ βρείτε φυσικό αριθμό $n_0 = n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{2n+1}{n^2+1} < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Επαληθεύστε την ανισότητα για την επιλογή σας.

β) Δίδεται ακολουθία a_n για την οποία ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε

$$a_n > \frac{4}{5}, \quad n \geq n_0.$$

Θέμα 3. Η ακολουθία a_n είναι άνω φραγμένη ενώ η b_n είναι θετική και τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}.$$

Θέμα 4. α) Αποδείξτε τις ανισότητες

$$\frac{1}{x} > \ln \left(\frac{1+x}{x} \right) > \frac{1}{x+1}, \quad x > 0.$$

β) Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$\gamma_n = \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right),$$

συγκλίνει.

Θέμα 5. Δίδεται η ακολουθία a_n για την οποία

$$a_n \geq 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

και είναι τέτοια ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

αποκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$$

συγκλίνει ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

αποκλίνει.

Θέμα 6. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)} + f(x) - x = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι

(α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και ικανοποιεί:

$$f''(x) + (f'(x))^2 \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(β) Η $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί

$$(f^{-1})'(y) = 1 + e^y, \quad y \in \mathbf{R}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Διάρκεια 3 ώρες