

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Παραδώστε τις ασκήσεις 2.1, 2.2, 2.3 και ένα πίνακα από το 2.5

Άσκηση 2.1 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τους παρακάτω πίνακες χωρίς να κάνετε πολλαπλασιασμό πινάκων (σύμφωνα με τον ορισμό):

- (i) $E_{1 \leftrightarrow 3} A$,
- (ii) $E_{2 \leftrightarrow 3} E_{1 \leftrightarrow 3} A$,
- (iii) $E_{3,1}(-2) A$.

Άσκηση 2.2 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα A^2 . Υπολογίστε τον πίνακα A^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.3 Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $3A = A^2 + AB$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα A .

Άσκηση 2.4 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι $A^3 - 3A^2 + 4I_3 = O$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφο του.

Άσκηση 2.5 Για καθένα από τους παρακάτω πίνακες, εξετάστε εάν είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφο, εφόσον υπάρχει:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.6 Έστω ότι γνωρίζετε ότι ένας πληθυσμός εξελίσσεται σύμφωνα με την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \quad a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$$

Ορίζουμε τα διανύσματα

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

(i) Βρείτε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιο ώστε

$$v_n = A v_{n-1}, \quad \text{για κάθε } n = 3, 4, \dots$$

(ii) Παρατηρήστε ότι $v_n = A^{n-2} v_2$ για $n = 2, 3, \dots$

(iii) Υπολογίστε το v_{1000} και από αυτό το a_{1000} (χρησιμοποιήστε υπολογιστή!)