ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΔΠΜΣ Βιοπληροφορική

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Θ. Γαρεφαλάκης

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Παραδώστε τις ασκήσεις 3.1, 3.2, 3.5

Άσκηση 3.1 Ποια από τα επόμενα υποσύνολα W του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι;

1. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$
2. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$
3. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$
4. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$
5. $W = \{(0, 0, 0)\}$
6. Όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των δύο διανυσμάτων $x = (1, 1, 0), y = (2, 0, 1)$
7. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - y + 3x = 0\}$
8. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\}$
9. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0 \text{ και } y + z = 0\}$

Για όσα σύνολα είδατε ότι είναι υπόχωροι βρείτε μία βάση.

Άσκηση 3.2

1. Δείξτε ότι τα $(1, 1)$ και $(-1, 2)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^2$.
2. Εξετάστε εάν τα διανύσματα $(1, 2, 1), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.3 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, -2, -1)$ ανήκει στο χώρο στηλών του A. Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν ανήκει στο χώρο στηλών του A.

Άσκηση 3.4 Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Εξετάστε εάν τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εάν δεν είναι, δώστε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης.

2. Εξετάστε εάν $w \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$.

Άσκηση 3.5 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A.

2. Βρείτε την γενική λύση του $Ax = b$ όταν $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$.

3. Βρείτε μία βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{N}(A)$.

4. Δείξτε ότι το διάνυσμα $v = (-1, 0, 1, 1)$ ανήκει στον $\mathcal{N}(A)$ και γράψτε το v σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$ που βρήκατε.

5. Βρείτε μία βάση για το χώρο στηλών, $\mathcal{R}(A)$, του πίνακα.

Άσκηση 3.6 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ του ποίου ο μηδενόχωρος έχει διάσταση 2 και ο χώρος στηλών παράγεται από 2 διανύσματα.

2. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$, τότε $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2$.

3. Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$.

4. Υπάρχει γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων, $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$, του $\mathbb{R}^n$.

5. Αν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m, u\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, τότε $n = m$ και το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.

6. Αν ο μηδενόχωρος ενός 3×4 πίνακα A παράγεται από το διάνυσμα $(2, 3, 1, 0)$, τότε ο πίνακας έχει τάξη 2.

Άσκηση 3.7 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.

a. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\;\; f(x, y) = (3xy, 2y, x - y)$,

b. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\;\; g(x, y, z) = (3x + y + 1, x - y + z)$,

c. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\;\; h(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

d. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\;\; g(x, y, z) = (3x + y + z, x - y + z)$,

Άσκηση 3.8 Δίνεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x) = Ax$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

βρείτε τον τύπο της T (δηλ. $T(x, y, z)$). Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ανήκει στην εικόνα της T.