

## ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

### Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Παραδώστε όλες τις ασκήσεις.

Άσκηση 4.1 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με

$$\begin{aligned}f(1, -1, 0, 1) &= (1, 0, 1) \\f(-2, 1, 1, 0) &= (2, 1, -1) \\f(0, 1, 1, 1) &= (-1, 1, 0) \\f(0, 0, 1, 1) &= (2, 2, 0)\end{aligned}$$

- (i) Δείξτε ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 1), (-2, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$  είναι βάση του  $\mathbb{R}^4$  (και επομένως η  $f$  είναι καλά ορισμένη).
- (ii) Βρείτε τον πίνακα της  $f$ .
- (iii) Βρείτε την τιμή  $f(1, 2, 3, 4)$ .
- (iv) Βρείτε μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της  $f$ .
- (v) Βρείτε ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$  το οποίο δεν ανήκει στην εικόνα της  $f$ .

Άσκηση 4.2 Έστω η βάση  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  του  $\mathbb{R}^3$ . Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη κανονική βάση στην  $\mathcal{B}$ . Γράψτε το διάνυσμα  $(2, 3, 1)$  ως προς τη βάση  $\mathcal{B}$ .

Άσκηση 4.3 Έστω η γραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y + 5z, y + 2z)$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 4.4 Έστω ο χώρος  $V = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ .

- (i) Βρείτε μία βάση του  $V$ .
- (ii) Βρείτε ένα ισομορφισμό  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ .
- (iii) Βρείτε ένα ισομορφισμό  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ .