ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΔΠΜΣ Βιοπληροφορική

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Θ. Γαρεφαλάκης

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Δεν παραδίνετε ασκήσεις.

Άσκηση 5.1 Θεωρούμε τις βάσεις $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1,0,-1),(1,2,0),(1,1,2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(i) Υπολογίστε τους πίνακες αλλαγής βάσης από την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$ και αντίστροφα.

(ii) Έστω $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε το $L(1,1,1)$.

Άσκηση 5.2 Δίνονται τα σύνολα $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ και $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(2,-1,1),(0,1,2)\}$ και η γραμμική απεικόνιση με πίνακα $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Δείξτε ότι τα σύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Δείξτε ότι η L είναι ισομορφισμός.

(iii) Βρείτε τον τύπο της L^{-1}.

Άσκηση 5.3 Θεωρείστε τη βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα διανύσματα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1,0,1),(1,1,3),(1,-2,2)\}$. Θεωρείστε επίσης τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, L(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2, L(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Να υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς την βάση $\mathcal{B}$ καθώς και ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 5.4 Έστω A ένας 3×3 πίνακας με $\det(A) = -1$. Υπολογίστε την ορίζουσα καθενός από τους παρακάτω πίνακες: $\frac{1}{2}A, A^3, AA^t, A^{-1}$.

Άσκηση 5.5 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, με $\det(A) = D$. Υπολογίστε τις $\det(2A), \det(A^2), \det(-A), \det(A^t)$.

Άσκηση 5.6 Για καθένα από τους παρακάτω πίνακες, εξετάστε εάν είναι διαγωνίσιμος και εφόσον είναι διαγωνιοποιήστε τον.

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5.7 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα A^{1821}.

Άσκηση 5.8

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(\frac{x_1y_1}{1} + \frac{x_2y_2}{2} + \cdots + \frac{x_ny_n}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}\right)\left(\frac{y_1^2}{1} + \frac{y_2^2}{2} + \cdots + \frac{y_n^2}{n}\right).$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Άσκηση 5.9 Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, βρείτε την ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στη βάση $(1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 1, 2)$.

Άσκηση 5.10 Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x - y + 2z = 0\}$.

Άσκηση 5.11 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_4, -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4, -x_1 + x_2 + x_3 - x_4).$$

(i) Υπολογίστε μία ορθογώνια βάση του $\ker(L)$.

(ii) Υπολογίστε μία βάση του $\ker(L)^\perp$.

Άσκηση 5.12 Δίνεται ο υπόχωρος $U = \mathrm{Span}(\{(1, 1, -1, 0), (0, -1, 2, 1)\})$ του $\mathbb{R}^4$. Υπολογίστε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(1, 1, -1, 1)$ στον U.