

## A32 – Κωδικοποίηση

### Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

**Άσκηση 1.1** Έστω  $\mathbb{F}_2$  το πεπερασμένο σώμα με 2 στοιχεία.

- (i) Δείξτε ότι τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 3 πάνω από το  $\mathbb{F}_2$  είναι τα  $f = X^3 + X + 1$  και  $g = X^3 + X^2 + 1$ .
- (ii) Θεωρήστε μία ρίζα  $\alpha$  του  $f$ . Καταγράψτε όλα τα στοιχεία του σώματος  $\mathbb{F}_{2^3} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ .
- (iii) Εκφράστε τις άλλες δύο ρίζες του  $f$  ως προς τη βάση  $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ .
- (iv) Αν  $\beta$  είναι μία ρίζα του  $g$ , τότε  $\mathbb{F}_2(\beta) = \mathbb{F}_{2^3}$ . Άρα  $\beta \in \mathbb{F}_2(\alpha)$ . Γράψτε το  $\beta$  ως προς τη βάση  $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ .
- (v) Βρείτε ένα γεννήτορα της πολλαπλασιαστικής ομάδας  $\mathbb{F}_{2^3}^*$ .

**Άσκηση 1.2** Έστω  $\alpha$  μια ρίζα του  $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ . Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + (\alpha + 1)x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha^5 x_2 + x_3 = \alpha \end{cases}$$

**Άσκηση 1.3** Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3 \times 5}.$$

Υπολογίστε μία βάση του μηδενόχωρου και μία βάση του χώρου στηλών του  $A$ .