ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Α32 – Κωδικοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 2.1

(i) Έστω $x, y \in \mathbb{F}_q^n$. Δείξτε ότι το $\mathrm{wt}(x+y)$ είναι άρτιος αν και μόνο αν τα $\mathrm{wt}(x), \mathrm{wt}(y)$ είναι και τα δύο άρτια ή και τα δύο περιττά. Υπόδειξη: Ονομάστε $X = \mathrm{supp}(x), Y = \mathrm{supp}(y)$ και παρατηρήστε ότι $\mathrm{wt}(x) = |X|, \mathrm{wt}(y) = |Y|$ και $\mathrm{wt}(x+y) = |X| + |Y| - 2|X \cap Y|$.

(ii) Έστω C ένας δυαδικος γραμμικός κώδικας. Δείξτε ότι είτε όλα τα διανύσματα του C έχουν άρτιο βάρος ή τα μισά έχουν άρτιο και τα μισά έχουν περιττό βάρος.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο $C_0 = \{c \in C : \mathrm{wt}(c) \equiv 0 \pmod 2\}$ είναι υπόχωρος του C. Πόσα σύμπλοκα του C_0 εντός του C υπάρχουν;

Άσκηση 2.2 Έστω C ένας δυαδικός, αυτο-δυϊκός $[n, k]$ κώδικας. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(i) Κάθε λέξη του C έχει άρτιο βάρος.

(ii) Αν $x, y \in C$ και $\mathrm{wt}(x), \mathrm{wt}(y) \equiv 0 \pmod 4$, τότε $\mathrm{wt}(x+y) \equiv 0 \pmod 4$.

(iii) Η λέξη $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ ανήκει στον C.

(iv) Δείξτε ότι είτε κάθε λέξη του C έχει βάρος $\equiv 0 \pmod 4$ ή ακριβώς οι μισές λέξεις έχουν βάρος $\equiv 0 \pmod 4$ και οι μισές έχουν βάρος $\equiv 2 \pmod 4$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο $C_0 = \{c \in C : \mathrm{wt}(c) \equiv 0 \pmod 4\}$ είναι υπόχωρος του C. Αν υπάρχει λέξη $x \in C$ με $\mathrm{wt}(x) \equiv 2 \pmod 4$, δείξτε ότι το πηλίκο C/C_0 περιέχει μόνο τα σύμπλοκα C_0 και $x + C_0$.

Άσκηση 2.3 Έστω C γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$ μήκους n και διάστασης k και σταθεροποιήστε ένα δείκτη $1 \leq i \leq n$. Δείξτε ότι είτε κάθε λέξη του C έχει 0 στη συντεταγμένη i ή κάθε στοιχείο $\alpha \in \mathbb{F}_q$ εμφανίζεται σε ακριβώς q^{k-1} λέξεις του C.

Άσκηση 2.4 Έστω C γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$ με παραμέτρους $[n, k, d]$ και υποθέστε ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει λέξη του κώδικα της οποίας η i συντεταγμένη είναι μη μηδενική.

(i) Δείξτε ότι το άθροισμα των βαρών όλων των λέξεων του C είναι ίσο με $n(q-1)q^{k-1}$.

(ii) Δείξτε ότι $d \leq n(q-1)q^{k-1}/(q^k - 1)$.

(iii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει γραμμικός δυαδικός $[15, 7, d]$-κώδικας με $d \geq 8$.

Άσκηση 2.5 Έστω φυσικός $n \geq 3$. Δείξτε ότι υπάρχει $[n, k, 3]$ κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$ αν και μόνο αν $q^{n-k} \geq (q-1)n$.