ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-25
Θ. Γαρεφαλάκης

Α32 Κωδικοποίηση
Φυλλάδιο Ασκήσεων 0

Στα παρακάτω προβλήματα μπορείτε να θεωρήσετε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό ως προς και τα δύο ορίσματα.

Άσκηση 0.1 : Έστω σώμα $\mathbb{F}$, V ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Συμβολίζουμε με V' το χώρο των γραμμικών μορφών του V, δηλαδή $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} L : V &\longrightarrow V' \\ v &\mapsto \langle \cdot, v \rangle \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός. Είναι γνωστό ότι $\dim V' = \dim V$.

Άσκηση 0.2 : Έστω σώμα $\mathbb{F}$, V ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και C ένας υπόχωρος του V. Ορίζουμε τον μηδενιστή του C ως $C^0 = \{f \in V' : \forall v \in C \quad f(v) = 0\}$. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(i) $C^0 = \{\langle \cdot, u \rangle : u \in C^\perp\}$,

(ii) $\{\langle \cdot, u \rangle : u \in C^\perp\} \cong C^\perp$.

Άσκηση 0.3 : Έστω σώμα $\mathbb{F}$, V ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n, και C ένας υπόχωρος του V. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \pi : C^0 &\longrightarrow \left(\frac{V}{C}\right)' \\ f &\mapsto \overline{f} \end{aligned}$$

με $\overline{f}(v + C) = f(v)$, είναι καλά ορισμένη και είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 0.4 : Έστω σώμα $\mathbb{F}$, V ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και C ένας υπόχωρος του V. Δείξτε ότι $\dim C^\perp = n - \dim C$.

Άσκηση 0.5 : Έστω σώμα $\mathbb{F}$ και πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι η διάσταση του χώρου γραμμών και η διάσταση του χώρου στηλών του A είναι ίσες. Είναι γνωστό ότι για κάθε $m \times n$ πίνακα A ισχύει $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$.

Υπόδειξη: Στο χώρο $V = \mathbb{F}^n$ θεωρήστε το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και παρατηρήστε ότι $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^\top)^\perp$.