

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Παν/μίου Κρήτης
Εξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου ακαδημαϊκού έτους 2008-2009
Κυριακή, 13 Σεπτεμβρίου 2009

TEM-212: Άλγεβρα

Διδάσκων: Α. Τόγκας

Θέματα

(Δικαιολογείστε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας)

Θέμα 1 (1.4 μον.) Να βρεθεί ο μοναδικός ακέραιος $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq 139$, που ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα

$$x \equiv 1 \pmod{4}, \quad x \equiv 2 \pmod{5}, \quad x \equiv 3 \pmod{7}.$$

Θέμα 2 (1.4 μον.) **(α)** Να βρεθεί το πλέγμα υποομάδων της ομάδας \mathbb{Z}_{32} .

(β) Να βρεθούν τα στοιχεία της \mathbb{Z}_{32} που έχουν τάξη 8.

Θέμα 3 (1.4 μον.) **(α)** Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών πλευρικών κλάσεων της $\langle [6] \rangle$ στην \mathbb{Z}_{24} και να καταγραφούν τα σύνολα αυτά.

(β) Να βρεθεί η τάξη του στοιχείου $([4], [7], [5])$ στην $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10}$.

Θέμα 4 (1.4 μον.) Να βρεθούν όλες οι αβελιανές ομάδες τάξης $600 = 2^3 3 5^2$. Για κάθε μια ομάδα να βρεθεί η ανάλυση σε στοιχειώδεις παράγοντες και η ανάλυση σε αναλλοίωτους παράγοντες.

Θέμα 5 (1.4 μον.) Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x, \quad \text{στο } \mathbb{Z}_{12}.$$

Θέμα 6 (1.4 μον.) Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = x^3 + 2x - 3,$$

δεν είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$, και να γραφεί ως γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων μικρότερου βαθμού στον $\mathbb{Z}_5[x]$.

Θέμα 7 (1.6 μον.) Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = x^4 + x^2 + 2,$$

είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$.