ΤΕΜ231, Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013

1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ
(Διδάσκων: Δ. Τσαγκαρογιάννης)
Παράδοση: 12.12.12

Άσκηση 1η:
Έστω ο πίνακας $A \equiv [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \equiv [P_1, \ldots, P_n]$ όπου τα διανύσματα $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{R}^m$, για $m < n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $P_1, \ldots, P_{p-1}, P_q, P_{p+1}, \ldots, P_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $a_{pq} \neq 0$ για κάποια $1 \leq p \leq m$ και $m+1 \leq q \leq n$.

Άσκηση 2η: Να λύσετε το παρακάτω π.γ.π.: ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $-7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5$ υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_4 + x_6 &= 12 \end{aligned}$$

και $x_i \geq 0$, για $i = 1, \ldots, 6$. Να ορίσετε το δυϊκό πρόβλημα και να βρείτε τη βέλτιστη λύση του.

Άσκηση 3η:
Έστω το π.γ.π.: ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $x_1 + \beta x_2 - x_3 - x_4$ υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + \beta x_3 + x_4 &= 4 + \alpha \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 + 2\alpha \end{aligned}$$

και $x_i \geq 0$, για $i = 1, 2, 3, 4$. Να βρεθούν οι τιμές των α και β για τις οποίες το πρόβλημα έχει άριστη λύση με βασικές μεταβλητές τις x_1 και x_4.

Άσκηση 4η: Να δείξετε ότι το διάνυσμα $x^* = (12, 3, 0)^T$ είναι βέλτιστη λύση του παρακάτω π.γ.π.: ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $40x_1 + 132x_2 + 140x_3$ υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 18 \end{aligned}$$

και $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Να βρείτε αν η λύση παραμένει βέλτιστη αν αλλάξουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε: $40x_1 + 132x_2 + 100x_3$.

Άσκηση 5η: Οι πύργοι του Ανόι (Towers of Hanoi) είναι το παρακάτω μαθηματικό πρόβλημα: έστω ότι έχουμε τρεις θέσεις στις οποίες μπορούμε να κατασκευάσουμε από ένα πύργο του Ανόι ο οποίος αποτελείται από n δίσκους με διαβαθμούμενη ακτίνα που τοποθετούνται ο ένας πάνω στον άλλο ξεκινώντας από εκείνον με τη μεγαλύτερη ακτίνα στη βάση και καταλήγοντας σε αυτόν με τη μικρότερη στην κορυφή. Έχοντας ένα τέτοιο πύργο στη μία θέση και άδειες τις υπόλοιπες, στόχος μας είναι να μεταφέρουμε τον πύργο από την αρχική του θέση σε μία άλλη τελική υπακούοντας στους παρακάτω τρεις περιορισμούς:

- Κάθε φορά μπορούμε να μετακινήσουμε μόνο ένα δίσκο.
- Κάθε μετακίνηση γίνεται παίρνοντας μόνο τον πάνω δίσκο από κάποιο πύργο και τοποθετώντας τον στην υψηλότερη θέση κάποιου άλλου πύργου.
- Ένας δίσκος δεν μπορεί να τοποθετηθεί πάνω σε άλλο με μικρότερη ακτίνα.

Να μοντελοποιήσετε το παραπάνω πρόβλημα με δυναμικό προγραμματισμό και να βρείτε την εξίσωση που το επιλύει.

Άσκηση 6η: Έχουμε N αντικείμενα που τα ονοματίζουμε $1, \ldots, N$ και θέλουμε να τα χωρίσουμε σε ομάδες που αποτελούνται από διαδοχικά αντικείμενα. Για κάθε τέτοια ομάδα, π.χ. $i, i+1, \ldots, j$, έχουμε το σχετικό κόστος a_{ij}. Θέλουμε να βρούμε την ομαδοποίηση με το χαμηλότερο κόστος. Να ορίσετε το πρόβλημα σαν πρόβλημα ελάχιστου μονοπατιού και να βρείτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού που το επιλύει.