17/10/2012

Τι γίνεται όταν το $\underline{b}$ έχει κάποιο αρνητικό στοιχείο?
Δηλαδή έχουμε μια βασική λύση που όμως δεν είναι εφικτή.
Αν επιπλέον ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$ * $\forall j$ τότε έχουμε μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού:

$$\underline{\lambda}^T = \underline{c}_B B^{-1} \left(\text{αφού } \underline{\lambda}^T A = \underline{c}_B^T B^{-1} \geq \underline{c}^T \right)$$

↑ Πίνακας simplex *

Λέμε τότε ότι η $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$ είναι "δυϊκώς εφικτή"
Αν επιπλέον βρούμε $\underline{x}_B \geq 0$ τότε είναι εφικτή και για το αρχικό πρόβλημα και αφού ισχύει το * (δηλ. $z_j - c_j \geq 0 \; \forall j$) είναι και βέλτιστη.
Παραμένουμε στο tableau του αρχικού προβλήματος αλλά δουλεύουμε στο δυϊκό πρόβλημα.

- Βασική ιδέα: Για το αρχικό πρόβλημα διατηρούμε το "βέλτιστο" της τελευταίας γραμμής και προσπαθούμε να φτιάξουμε το "εφικτό".
Για το δυϊκό διατηρούμε το "εφικτό" του προβλήματος και οδεύουμε προς βελτιστοποίηση.

Θεωρία - Παράδειγμα.

Θεωρία:
$$\left.\begin{array}{r} \min \underline{c}^T \cdot \underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{δυϊκό:} \quad \left.\begin{array}{r} \max \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ \underline{\lambda}^T A \leq \underline{c} \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\}$$

Έστω ότι γνωρίζουμε μια βάση B τ.ω. το διάνυσμα του δυϊκού προβλήματος $\underline{\lambda}^T = \underline{c}_B B^{-1}$ να είναι εφικτή λύση του δυϊκού.

Παράδειγμα (Πρόβλημα της δίαιτας)

x_i: ποσότητα του κάθε φαγητού αντίστοιχα

$$= -\max(-3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$$

$$\min(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$$

πρώτη θρεπτική ουσία στο 1ο φαγητό ~~πρώτη θρεπτική ουσία στο 2ο και~~ 1η θρεπτική ουσία στο 3ο φαγητό.

Θρεπτική ουσία 1 $\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$

Θρεπτική ουσία 2 $\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

διότι το φέρνουμε σε κανονική μορφή:

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5$$
$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + x_5 = -6$$
$$x_4, x_5 \geq 0$$

Σημείωση: ~~και~~ δεν αφαιρέσαμε x_4, x_5 για να φέρουμε σε κανονική μορφή διότι θα είχαμε αρνητικό μοναδιαίο. Σκοπός μας είναι να έχουμε θετικό μοναδιαίο.

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

tableau Simplex:

$$\begin{array}{c|c|c} B^{-1}b & B^{-1}A & B^{-1}I \\ \hline & \underbrace{c_B^T B^{-1}A - c^T}_{\text{"z-c"}} & c_B^T B^{-1} \end{array}$$

Για προβλήματα σε min( ) έχουμε "c-z"

διανύσματα βάσης	c_B	b	c_j: 3	4	5	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_4	0	-5	-1	-2	-3	1	0
$i^* \to$ P_5	0	-6	-2	-2	-1	0	1
$c_j - z_j$:			+3	+4	+5	0	0

$B = (P_4, P_5) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\lambda^T = (0,0)$ ← εφικτή λύση διότι είναι ≥ 0

Οπότε η $x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix}-5\\ -6\end{pmatrix}$

είναι "δυϊκώς εφικτή" αφού $c_j - z_j \geq 0 \ \forall j$

- Αν $x_B \geq 0$ τότε είναι εφικτή και για το αρχικό και άρα βέλτιστη.

Όμως στην περίπτωση μας δεν είναι καθώς $x_4 = -5$, $x_5 = -6$.
Έτσι επιλέγουμε ένα **τυχαίο**:

π.χ $i^* = 5$ (όπου i^* = γραμμή)

Το διάνυσμα λ^T είναι εφικτό και λύση του δυϊκού, οπότε στην πιο γενική περίπτωση όπου $B = (P_1, \dots, P_m)$. Δηλαδή σε γενική μορφή:

$$\text{διάσταση } m \left\{ \underbrace{\left(\overbrace{P_1 \dots P_m}^{B} \;\vdots\; P_{m+1} \dots P_n \right)}_{\text{διάσταση } n} \right.$$

Τότε: • $\lambda^T P_j = c_j$, $j = 1, \dots, m$

• $\lambda^T P_j < c_j$, $j = m+1, \dots, n$

Στην περίπτωση μας δηλαδή: $0 \cdot P_4 = 0$ ✓

$0 \cdot P_5 = 0$ ✓

Ψάχνουμε ένα νέο λ, έστω $\hat{\lambda}$ τ.ω. αλλάζοντας τη P_{i}^* με κάποια P_j^* μειώνουμε το κόστος και "σκοτώνουμε" τα $x < 0$.

Υπενθύμιση: $\underline{\lambda}^T \underline{P}_{i^*} < c_{i^*} \Rightarrow x_{i^*} = 0$

Δοκιμάζουμε: $\hat{\underline{\lambda}}^T = \underline{\lambda}^T - \varepsilon \cdot \underline{u}_{i^*}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} — u_1 — \\ — u_{i^*} — \\ — u_m — \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_m \end{pmatrix}$$

Τώρα πάμε να πολ/με το νέο $\hat{\lambda}^T$ με τα διάφορα $\underline{P}$

$$\hat{\underline{\lambda}}^T \underline{P}_j = \underline{\lambda}^T \underline{P}_j - \varepsilon \underbrace{\underline{u}_{i^*} \underline{P}_j}_{} =$$

$$= \begin{cases} \text{Αν } j = i^*, & = c_{i^*} - \varepsilon \\ \text{Αν } j \neq i^*, 1 \leq j \leq m, & = c_j - 0 \\ \text{Αν } j = m+1, \dots, n & = z_j - \varepsilon\, y_{i^* j} \end{cases}$$

ένας αριθμός από τον $B^{-1}A$