

Ημερομηνία παράδοσης: Τετάρτη 20.03.2013

1η άσκηση: Να δείξετε ότι για κάθε συλλογή ενδεχομένων A_i , όπου $i = 1, \dots, n$, ισχύει ότι

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

2η άσκηση: Ένα κουτί περιέχει τρεις κάρτες: μία κόκκινη και από τις δύο πλευρές, μία πράσινη και από τις δύο πλευρές και μία που είναι κόκκινη από τη μία και πράσινη από την άλλη πλευρά. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε ότι η μία της πλευρά είναι πράσινη. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και η άλλη πλευρά πράσινη;

3η άσκηση: Ας υποθέσουμε ότι όταν μια μηχανή λειτουργεί σωστά, 50% των αντικειμένων που παράγονται είναι υψηλής ποιότητας και τα υπόλοιπα μέτριας ποιότητας. Ας υποθέσουμε όμως ότι η μηχανή το 10% των περιπτώσεων δεν λειτουργεί σωστά οπότε το 25% των αντικειμένων είναι υψηλής ποιότητας και το 75% είναι μέτριας. Αν πάρουμε 5 αντικείμενα που παράγονται από τη μηχανή μια συγκεκριμένη στιγμή και βρούμε ότι τα 4 είναι άριστης ποιότητας και το 1 μόνο είναι μέτριο, ποιά είναι η πιθανότητα η μηχανή να λειτουργούσε σωστά εκείνη τη στιγμή;

4η άσκηση: Ρίχνουμε ένα κέρμα. Ποιά είναι η πιθανότητα p_n να πρέπει να ρίξουμε το κέρμα n φορές μέχρι να έρθει "κορώνα"; Να δείξετε επίσης ότι η πιθανότητα να έρθει κάποια στιγμή "κορώνα" είναι ίση με 1.

5η άσκηση: Δεδομένου ενός ενδεχομένου C , τα ενδεχόμενα A και B λέγονται *δεσμευμένα ανεξάρτητα* αν

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος και έστω τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{η 1η ρίψη είναι κορώνα}\}$$

$$B = \{\text{η 2η ρίψη είναι κορώνα}\}$$

$$D = \{\text{οι δύο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα}\}$$

Να δείξετε ότι ενώ τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, δεν είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα.

6η άσκηση: (Διωνυμικό θεώρημα) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε θετικό ακέραιο n να δείξετε ότι

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$