ΤΕΜ-161, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ημερομηνία παράδοσης: Τετάρτη 20.03.2013

1η άσκηση: Να δείξετε ότι για κάθε συλλογή ενδεχομένων A_i, όπου $i = 1, \ldots, n$, ισχύει ότι

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \text{και} \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

Λύση: Έστω $\omega \in (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$. Τότε $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \Rightarrow \omega \in A_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Οπότε $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$. Αντιστρόφως, αν $\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$, τότε $\omega \notin A_i$ για κάθε i. Άρα $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, που συνεπάγεται ότι $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \subset (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

Για τη δεύτερη σχέση, εφαρμόζουμε την πρώτη για τη συλλογή $\{A_i^c, i = 1, \ldots, n\}$. □

2η άσκηση: Ένα κουτί περιέχει τρεις κάρτες: μία κόκκινη και από τις δύο πλευρές, μία πράσινη και από τις δύο πλευρές και μία που είναι κόκκινη από τη μία και πράσινη από την άλλη πλευρά. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε ότι η μία της πλευρά είναι πράσινη. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και η άλλη πλευρά πράσινη;

Λύση: Έστω A, (αντίστοιχα B και C) τα ενδεχόμενα να έχει επιλεγεί η πρώτη (αντίστοιχα δεύτερη και τρίτη) κάρτα και έστω D το ενδεχόμενο η επιλεγμένη πλευρά να είναι πράσινη. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(A|D)$. Για το ενδεχόμενο D έχουμε την ολική πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Οπότε $P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$. □

3η άσκηση: Ας υποθέσουμε ότι όταν μια μηχανή λειτουργεί σωστά, 50% των αντικειμένων που παράγονται είναι υψηλής ποιότητας και τα υπόλοιπα μέτριας ποιότητας. Ας υποθέσουμε όμως ότι η μηχανή το 10% των περιπτώσεων δεν λειτουργεί σωστά οπότε το 25% των αντικειμένων είναι υψηλής ποιότητας και το 75% είναι μέτριας. Αν πάρουμε 5 αντικείμενα που παράγονται από τη μηχανή μια συγκεκριμένη στιγμή και βρούμε ότι τα 4 είναι άριστης ποιότητας και το 1 μόνο είναι μέτριο, ποιά είναι η πιθανότητα η μηχανή να λειτουργούσε σωστά εκείνη τη στιγμή;

Λύση: Έστω A_1 το ενδεχόμενο η μηχανή να λειτουργεί σωστά και A_2 να μην λειτουργεί σωστά. Έστω B το ενδεχόμενο τα 4 από τα 5 αντικείμενα να είναι άριστης ποιότητας. Έχουμε

$$Pr(A_1|B) = \frac{Pr(B|A_1)P(A_1)}{Pr(A_1)Pr(B|A_1) + Pr(A_2)Pr(B|A_2)} = \ldots = \frac{96}{97}$$

όπου $P(B|A_1) = \binom{5}{4}(0.5)^5$ και $P(B|A_2) = \binom{5}{4}(0.25)^4(0.75)$. $\square$

4η άσκηση: Ρίχνουμε ένα τίμιο κέρμα. Ποιά είναι η πιθανότητα p_n να πρέπει να ρίξουμε το κέρμα n φορές μέχρι να έρθει "κορώνα"; Να δείξετε επίσης ότι η πιθανότητα να έρθει κάποια στιγμή "κορώνα" είναι ίση με 1.

Λύση: Θέλουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $G, \ldots, G, K$. Δηλαδή

$$p_n := P(G, \ldots, G, K) = \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n.$$

Για την πιθανότητα να έρθει κάποια στιγμή "κορώνα" αρκεί να αθροίσουμε τις πιθανότητες να έρθει "κορώνα" την πρώτη, τη δεύτερη κλπ φορά (δεδομένου ότι αυτά τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους). Οπότε,

$$\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

$\square$

5η άσκηση: Δεδομένου ενός ενδεχομένου C, τα ενδεχόμενα A και B λέγονται *δεσμευμένα ανεξάρτητα* αν

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος και έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &= \{\text{η 1η ρίψη είναι κορώνα}\} \\ B &= \{\text{η 2η ρίψη είναι κορώνα}\} \\ D &= \{\text{οι δύο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα}\} \end{aligned}$$

Να δείξετε ότι ενώ τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, δεν είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα.

Λύση: Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αφού οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αλλά

$$P(A|D) = \frac{1/4}{1/2}, \quad P(B|D) = \frac{1/4}{1/2}, \quad \text{και} \quad P(A \cap B|D) = 0$$

Οπότε $P(A \cap B|D) \neq P(A|D)P(B|D)$, άρα τα A και B δεν είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα. $\square$

6η άσκηση: (Διωνυμικό θεώρημα) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε θετικό ακέραιο n να δείξετε ότι

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Λύση: Δείτε στη σελίδα της wikipedia.