

Ημερομηνία παράδοσης: Τετάρτη 15.05.2013

**1η άσκηση:** Έστω τρεις ανεξάρτητες τ.μ.  $X_1$ ,  $X_2$  και  $X_3$  με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 1]$ . Να υπολογίσετε την ποσότητα

$$E[(X_1 - 2X_2 + X_3)^2].$$

**2η άσκηση:** Έστω ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο είναι το ίδιο πιθανό να κερδίσουμε ή να χάσουμε. Αν κερδίσουμε διπλασιάζουμε την περιουσία μας, ενώ αν χάσουμε την υποδιπλασιάζουμε. Έστω ότι ξεκινάμε με ένα ποσό  $c$ . Ποιά θα είναι η μέση τιμή της περιουσίας μας αν παίξουμε  $n$  φορές (ανεξάρτητες επαναλήψεις του παιχνιδιού);

**3η άσκηση:** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y), & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή  $Var(2X - 3Y + 8)$ .

**4η άσκηση:** (Ανισότητα του Jensen)

Έστω  $g$  μια κυρτή συνάρτηση δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή. Τότε  $E[g(X)] \geq g(E[X])$ .

*Ιδέα: αναπτύξτε τη συνάρτηση  $g(X)$  γύρω από τη μέση τιμή  $E[X]$  της  $X$  χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor που λέει ότι αν  $g(x)$  έχει δύο συνεχείς παραγώγους στο σημείο  $x_0$ , τότε υπάρχει  $y$  μεταξύ  $x_0$  και  $x$  τέτοιο ώστε*

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}g''(y).$$