

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), & x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in [a, b] \\ u(t, a) = u(t, b) = 0, & \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Γράψτε δύο προγράμματα που να υλοποιούν την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο Crank-Nicolson για την επίλυση του προβλήματος για $t \in [0, T_f]$.

1. Θεωρήστε $[a, b] = [0, 1]$ και $u_0(x) := \sin(2\pi x)$. Υπολογίστε την αναλυτική λύση του προβλήματος.
2. Για $T_f = 1$ και για ομοιόμορφους διαμερισμούς της επιλογής σας υπολογίστε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος με τις δύο μεθόδους με τη βοήθεια των προγραμμάτων σας.
3. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της στο χρόνο $T_f = 1$ και σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.
4. Υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με $N_x = 20$ υποδιαστήματα του $[0, 1]$ και $N_t = 400$ χρονικά βήματα, στις χρονικές στιγμές $t_n = n\tau$ (όπου $\tau = T_f/N_t$), δηλ. την ποσότητα

$$E_{IE}^n := \max_{1 \leq i \leq N_x+1} |u_i^n - u(t_n, x_i)|$$

για $n = 100, 200, 400$. Επίσης, υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης με τη μέθοδο Crank-Nicolson με $N_x = 20$ υποδιαστήματα του $[0, 1]$ και $N_t = 20$ χρονικά βήματα, στις χρονικές στιγμές $t_n = n\tau$, δηλ. την ποσότητα

$$E_{CN}^n := \max_{1 \leq i \leq N_x+1} |u_i^n - u(t_n, x_i)|$$

για $n = 5, 10, 20$. Τι παρατηρείτε;

5. Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας των δύο μεθόδων.
6. Επαναλάβετε τα προηγούμενα ερωτήματα για $[a, b] = [0, 1]$ και $u_0(x) := \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$.

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- I. Ημερομηνία και ώρα κατάθεσης μέχρι 2/11, 23h59. Δε θα γίνει τίποτα δεκτό πέραν αυτής της ώρας.
- II. Η εξέταση της άσκησης θα γίνει σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

- III. Στην αναφορά σας θα πρέπει να περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και γραφήματα με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους. Η αναφορά πρέπει να κατατεθεί ως χωριστό pdf αρχείο ηλεκτρονικά και να έχει το ίδιο όνομα που θα έχει και ο κώδικας (βλέπε V). Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονόμα σας και τον αριθμό μητρώου σας στην πρώτη σελίδα της αναφοράς. Αναφορές χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.
- IV. Ο κώδικας θα πρέπει να κατατεθεί ως ένα compressed αρχείο το οποίο όταν θα γίνεται uncompressed θα φτιάχνει ένα directory που θα περιέχει όλα τα αρχεία που χρειάζεστε για την άσκηση. Το όνομα του αρχείου πρέπει να είναι CAM.tgz (ή CAM.zip) ή MAM.tgz ή FAM.tgz όπου το αρχικό C ή M ή F δηλώνει αν χρησιμοποιήτε C ή *matlab* ή FORTRAN και AM είναι ο αριθμός μητρώου σας (AM1-MA2 σε περίπτωση ομάδας). Το όνομα του directory που δημιουργείται πρέπει να είναι ίδιο με το όνομα του .tgz αρχείου.
- V. Στέλνετε μόνο το πρόγραμμα: τον κώδικα, όχι το εκτελέσιμο, ούτε τα αποτελέσματα.
- VI. Μην ξεχάσετε να γράψετε το όνομά σας και τον αριθμό μητρώου σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματός σας. Προγράμματα χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.
- VII. Επιπλέον βαθμοί θα δωθούν στις καλά δομημένες και σχολιασμένες αναφορές. Θα αξιολογηθεί επίσης θετικά η σαφήνεια και η απλότητα του κώδικα. Όμοιες ασκήσεις (είτε κώδικες είτε αναφορές) θα μηδενιστούν.

Για πληροφόρηση, <http://csmajor.stanford.edu/HonorCode.shtml>