

### Ασκήσεις

1. Έστω μια συνάρτηση  $f \in C^3[a, b]$ , ένα σημείο  $x \in (a, b)$  και βήμα  $h > 0$ , τέτοιο ώστε  $x \pm 2h \in [a, b]$ . Θεωρήστε τα πηλικά διαφορών

$$\delta_{h,+} f(x) = (\delta_{h,+} - \frac{h}{2} \delta_{h,+}^2) f(x)$$

$$\delta_{h,-} f(x) = (\delta_{h,-} + \frac{h}{2} \delta_{h,-}^2) f(x)$$

Δείξτε ότι

$$\delta_{h,+} f(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h},$$

$$\delta_{h,-} f(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$

Αποδείξτε ότι είναι προσεγγίσεις της  $f'(x)$  και ότι ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$|\delta_{h,+} f(x) - f'(x)| \leq h^2 \max_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)|,$$

και

$$|\delta_{h,-} f(x) - f'(x)| \leq h^2 \max_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)|.$$

2. Έστω μια συνάρτηση  $f \in C^4[a, b]$ , ένα σημείο  $x \in (a, b)$  και βήμα  $h > 0$ , τέτοιο ώστε  $x \pm 3h \in [a, b]$ . Θεωρήστε τα πηλικά διαφορών

$$\delta_{h,r} f(x) = (\delta_{h,+}^2 - h\delta_{h,+}^3) f(x)$$

$$\delta_{h,l} f(x) = (\delta_{h,-}^2 + h\delta_{h,-}^3) f(x)$$

Δείξτε ότι

$$\delta_{h,r} f(x) = \frac{2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2},$$

$$\delta_{h,l} f(x) = \frac{2f(x) - 5f(x-h) + 4f(x-2h) - f(x-3h)}{h^2}$$

Αποδείξτε ότι είναι προσεγγίσεις της  $f''(x)$  και ότι ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$|\delta_{h,r} f(x) - f''(x)| \leq \frac{25}{4} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

και

$$|\delta_{h,l} f(x) - f''(x)| \leq \frac{25}{4} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$