Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Ακαδ. έτος 2015–2016

15/10/2015

Ασκήσεις 2

1. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα πηλίκα διαφορών ειναι προσεγγίσεις της $f'''(x)$.
$$\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3},$$
και
$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3}.$$
Ποιά προσέγγιση είναι ακριβέστερη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δίνεται το πρόβλημα δύο σημείων
$$\begin{aligned} -u''(x)+q(x)u(x) &= f(x), \ \ 0\le x\le 1,\\ u'(0)=u(0), &\quad u(1)=0, \end{aligned}$$
όπου f, q συνεχείς συναρτήσεις στο [0,1] με $q(x)\ge q_0>0$, $x\in[0,1]$. Έστω U_j οι προσεγγίσεις των $u(x_j)$ στα σημεία $x_j=jh$, $j=0,1,\dots,N+1$, όπου $(N+1)h=1$, που δίνει η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}\Big(U_{j-1}-2U_j+U_{j+1}\Big)+q(x_j)U_j &= f(x_j), \quad 1\le j\le N,\\ \frac{1}{h}\Big(U_1-U_0\Big)-U_0 &= \frac{1}{2}\,h\,\Big(q(x_0)U_0-f(x_0)\Big), \end{aligned}$$
όπου $U_{N+1}=0$. Προσδιορίστε τον $(N+1)\times(N+1)$ πίνακα των συντελεστών A και το δεύτερο μέλος $b\in\mathbb{R}^{N+1}$ του συστήματος $AU=b$, $U=(U_0,U_1,\dots,U_N)^T$ αυτής της μεθόδου, και αποδείξτε ότι ο A αντιστρέφεται. Δικαιολογήστε τη μορφή της εξίσωσης για τον άγνωστο U_0.

3. Θεωρήστε το πρόβλημα
$$\begin{cases} -u''(x)+u'(x)+q(x)u(x)=f(x), & x\in[a,b]\\ u(a)=A,\ \ u(b)=B. \end{cases}$$
Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$, $x_i=a+ih$, $h=(b-a)/(N+1)$, $i=0,1,\dots,N+1$. Γράψτε τη μέθοδό σας σε μορφή συστήματος $AU=F$, (όπου U_i είναι η προσέγγιση της $u(x_i)$) και προσδιορίστε τον πίνακα των συντελεστών A και το δεύτερο μέλος F του συστήματος. Υπολογίστε τις προσεγγίσεις για το πρόβλημα με $[a,b]=[0,3]$, $q(x)=2$, $f(x)=x^2+x-1$, συν. συνθ. $u(0)=0$, $u(3)=9/2$, και βήμα διαμερισμού $h=1$.