

## 1η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υλοποιεί την ακόλουθη αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του (1),

$$\begin{cases} y^0 = y_0, \\ y^{n+1} = y^n + h[\theta f(t^n, y^n) + (1 - \theta)f(t^{n+1}, y^n + hf(t^n, y^n))], & n = 0, 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (2)$$

για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του  $[a, b]$  με βήμα  $h = (b - a)/n$ . Για το πρόγραμμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Fortran ή C (σε διπλή ακρίβεια) ή Matlab. Το προγράμμα σας να δέχεται σαν παράμετρος τα  $a, b, N, y_0$  και  $\theta$ . Η  $f(t, y)$  και η ακριβής λύση  $y(t)$  θα πρέπει να δίνονται ως υποπρογράμματα και να καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα όταν είναι απαραίτητο. Τα προγράμματά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζουν και να εκτυπώνουν στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου

$$\mathcal{E}(N) = \max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)|.$$

Θεωρήστε το π.α.τ.

$$\begin{cases} y' = y + 4\pi \cos(4\pi t) y, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

1. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση και βρείτε την αναλυτικά.
2. Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης με την μέθοδο (2) για  $\theta = 0$  και  $\theta = 1$ , καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς με  $N = 64, 128, \dots, 4096, 8192$  υποδιαστήματα.
3. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της με την μέθοδο (2) για  $\theta = 0$  και  $\theta = 1$  για  $N = 512$  υποδιαστήματα.
4. Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου (2) για  $\theta = 0$  και  $\theta = 1$ .

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Έστω  $\mathcal{E}(N)$  το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου για  $N$  υποδιαστήματα, και ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{E}(N) \approx Ch^p$ , όπου η σταθερά  $h$  είναι ανεξάρτητη του  $h$  και του  $N$ . Τότε

$$\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)}\right)}{\log 2}.$$

5. Σχεδιάστε ένα  $\log \log$  γράφημα του σφάλματος  $\mathcal{E}(N)$  συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων  $N$  για την μέθοδο (2) με  $\theta = 0$  και  $\theta = 1$  και με  $N = 64, 128, \dots, 4096, 8192$ .

## ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Δευτέρα 31/3, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- Η εξέταση είναι ατομική!
- Όποιος θέλει μπορεί να φέρει τον προσωπικό του υπολογιστή στην εξέταση.
- Στην εξέταση θα πρέπει να έχετε μαζί σας την φοιτητική σας ταυτότητα.