2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ένα εκκρεμές αποτελείται από σημειακή μάζα στο άκρο μίας ράβδου μήκους L που στηρίζεται σε κάποιο καρφί (χωρίς τριβή). Αν η βαρύτητα είναι η μόνη δύναμη που ενεργεί τότε η ταλάντωση του εκκρεμούς διαμορφώνεται από την εξίσωση

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta. \tag{1}$$

Στην (1), θ είναι η γωνιακή θέση της ράβδου, με $\theta = 0$ εάν η ράβδος κρέμεται κάτω απο το καρφί, και $\theta = \pi$ αν η ράβδος ξεκινάει την ταλάντωση ακριβώς πάνω από το καρφί. Πάρτε $L = 50$ cm και $g = 981\text{cm/s}^2$. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ και } \frac{d\theta}{dt}(0) = 0. \tag{2}$$

Εάν η αρχική γωνία θ_0 δεν είναι πολύ μεγάλη, τότε η προσέγγιση $\sin(\theta) = \theta$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και οδηγεί στο γραμμικό μοντέλο του ταλαντωτή

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{3}$$

που λύνεται εύκολα.

Γράψτε την διαφορική εξίσωση (1) σαν πρόβλημα αρχικών τιμών (σύστημα):

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{g}{L}\sin(y_1) \end{aligned} \tag{4}$$

όπου $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$.

Γράψτε ένα κώδικα που να επιλύει αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών τιμών (4)-(2) και το αντίστοιχο για το γραμμικό μοντέλο του ταλαντωτή χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο Euler και την κλασσική μέθοδο των Runge-Kutta με τέσσερα στάδια, που δίνεται από το μητρώο

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array} \tag{5}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ :

1. Υπολογίστε αναλυτικά τη λύση του γραμμικού προβλήματος. Ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς;

2. Χρησιμοποιώντας το γραμμικό μοντέλο και την ακριβή λύση που υπολογίσατε στο πρώτο ερώτημα βεβαιωθείτε υπολογιστικά ότι η τάξη ακρίβειας της άμεσης Euler είναι 1 ενώ της κλασσικής Runge-Kutta είναι 4.

3. Βεβαιωθείτε ότι για μικρές τιμές του θ_0 η γραμμική και η μη γραμμική εξίσωση έχουν περίπου την ίδια λύση και την ίδια περίοδο T. Τι γίνεται καθώς ο χρόνος περνάει; Τι γίνεται καθώς το θ_0 αυξάνει; Για διάφορες τιμές του θ_0, συγκρίνετε τις λύσεις του γραμμικού και του μη-γραμμικού μοντέλου σχεδιάζοντάς τες στην ίδια γραφική παράσταση. Κάντε δύο γραφικές παραστάσεις: θ ως συνάρτηση του χρόνου και το διάγραμμα φάσης $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$. Τι παρατηρείτε;

4. Υπολογίστε τη λύση του μη-γραμμικού μοντέλου για 3 περιόδους ($t = 3T$, χρησιμοποιώντας το γραμμικό μοντέλο για τον υπολογισμό της περιόδου T) για αρκετές διαφορετικές τιμές του θ_0, συμπεριλαμβανομένων των τιμών κοντά στο 0 και κοντά στο π. Τι παρατηρείτε;

5. Ένας τρόπος να προσθέσουμε τριβή στο μοντέλο είναι να θεωρήσουμε το π.α.τ.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{g}{L}\sin(y_1) - \beta y_2 \end{aligned} \tag{6}$$

6. Βάλτε διαφορετικές τιμές στο β, για παράδειγμα θεωρήστε $\beta = 0.5, 1, 2$. Τι παρατηρείτε;

7. Συγκρίνετε τις λύσεις με και χωρίς τριβή σχεδιάζοντάς τες στην ίδια γραφική παράσταση: κάντε δύο γραφικές παραστάσεις: θ ως συνάρτηση του χρόνου και το διάγραμμα φάσης $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$.

ΟΔΗΓΙΕΣ :

I. Μπορείτε να δουλέψετε σε ομάδες δύο ή τριών ατόμων αν θέλετε. Η κάθε ομάδα θα πρέπει να καταθέσει **ηλεκτρονικά** έναν κώδικα και μία αναφορά.

II. Ημερομηνία και ώρα κατάθεσης 18/5, 24h00. Δε θα γίνει τίποτα δεκτό πέραν αυτής της ώρας. Οδηγίες για την κατάθεση θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

III. Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 26–30/5, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

IV. Στην αναφορά σας θα πρέπει να περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και γραφήματα με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους. Η αναφορά πρέπει να κατατεθεί ως χωριστό pdf αρχείο ηλεκτρονικά και να έχει το ίδιο όνομα που θα έχει και ο κώδικας (βλέπε IV). Μην ξεχάσετε να γράψετε τα ονόματά σας και τους αριθμούς μητρώου στην πρώτη σελίδα της αναφοράς. Αναφορές χωρίς ονόματα ή/και αριθμούς μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.

V. Ο κώδικας θα πρέπει κατατεθεί ως ένα compressed αρχείο το οποίο όταν θα γίνεται uncompressed θα φτιάχνει ένα directory που θα περιέχει όλα τα αρχεία που χρειάζεστε για την άσκηση. Το όνομα του αρχείου πρέπει να είναι CAM1AM2.tgz ή MAM1AM2.tgz όπου το αρχικό C ή M δηλώνει αν χρησιμοποιήτε C ή *matlab* και AM1, AM2 είναι οι δύο αριθμοί μητρώου των φοιτητών που έγραψαν την άσκηση (π.χ. math4564math4352). Το όνομα του directory που δημιουργείται πρέπει να είναι ίδιο με το όνομα του .tgz αρχείου.

VI. Στέλνετε μόνο το πρόγραμμα: τον κώδικα, όχι το εκτελέσιμο, ούτε τα αποτελέσματα.

VII. Μην ξεχάσετε να γράψετε τα ονόματά σας και τους αριθμούς μητρώου σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματός σας. Προγράμματα χωρίς ονόματα ή/και αριθμούς μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.

VIII. Επιπλέον βαθμοί θα δωθούν στις καλά δομημένες και σχολιασμένες αναφορές. Θα αξιολογηθεί επίσης θετικά η σαφήνεια και η απλότητα του κώδικα. Όμοιες ασκήσεις (είτε κώδικες είτε αναφορές) θα μηδενιστούν.

Για πληροφόρηση, http://csmajor.stanford.edu/HonorCode.shtml