

3η Εργαστηριακή Άσκηση.

Παράδοση: Η εξέταση της άσκησης θα γίνει στο εργαστήριο την Τρίτη 19 Ιουνίου 13:00-15:00 στην αίθουσα Λ206. Να μου στείλετε και τον κώδικα με email σε ένα αρχείο της μορφής ΕΑ3-ΕΠΩΝΥΜΟ-ΑΜ.tgz.

Σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση θα μελετήσουμε την συμπεριφορά διαφόρων αριθμητικών μεθόδων για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων της γραμμικής εξίσωσης (1). Έστω $x_j = j\Delta x$, $j = -M, \dots, M$, $M \in \mathbb{N}$, $\Delta x = 1/M$ μία ομοιόμορφη διαμέριση του $[-1, 1]$ και $t^n = n\Delta t$, $n = 0, \dots, N$, $t^N = T$ μια διαμέριση του $[0, T]$. Θεωρούμε το γραμμικό βαθμωτό πρόβλημα μεταφοράς

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & x \in [-1, 1], \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= 1 + \frac{\sin(\pi x)}{2}, & x \in [-1, 1], \\ u(-1, t) &= u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1)$$

με $a = 1$ και $T = 0.5, 1.0, 1.5$ και 2 .

- Υπολογίστε την ακριβή λύση του (1).
- Γράψτε ένα κώδικα FORTRAN, C ή MATLAB που να επιλύει το (1) με τις μεθόδους (2), (3) και (4).

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad (2)$$

$$\text{LAX: } u_j^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Leap - Frog: } u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad (4)$$

όπου $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

- Δοκιμάστε διάφορες τις τιμές του λ όπως $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$. Τι παρατηρείτε;
- Μελετήστε την συμπεριφορά του σφάλματος σε νόρμα L^1 (για κάθε μέθοδο)

$$\|U^N - u(\cdot, T)\|_{L^1} = \Delta x \sum_{j=-M}^M \{|U_j^N - u(x_j, T)|\}$$

όπου U_j^N είναι η προσεγγιστική λύση στο τελικό χρόνο N και $u(x_j, T)$ είναι η ακριβής λύση στο σημείο x_j στο χρόνο T . Βρείτε την αριθμητική τάξη της κάθε μεθόδου παίρνοντας διαδοχικές διαμερίσεις. ($M = 50, 100, 200, \dots$)

Ερωτήσεις/Παρατηρήσεις

1. Ποια είναι η τάξη συνέπειας των μεθόδων (2), (3) και (4);
2. Είναι οι μέθοδοι (2), (3) και (4) ευσταθής; υπό ποιες συνθήκες;
3. Την αρχική τιμή της προσεγγιστικής λύσης να την υπολογίσετε σύμφωνα με

$$U_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} u_0(x) dx$$

4. Για την μέθοδο (4) πρέπει να προτείνετε ένα τρόπο υπολογισμού του $u_j^1, j = -M, \dots, M$. Για να μην αλλάξει η ακρίβεια της μεθόδου θα πρέπει ο τρόπος υπολογισμού του $u_j^1, j = -M, \dots, M$ να γίνει με μία μέθοδο ίδιας τάξης με την μέθοδο (4).