2η Εργαστηριακή Άσκηση.

Παράδοση: Θα γράψετε μια αναφορά σε στην οποία θα υπάρχουν οι απαντήσεις στα ερωτήματα και σχολιασμός των αποτελεσμάτων. Η παράδοση της ασκησης θα γίνει μέχρι την Τετάρτη 4/4. Θα στείλετε με email ένα αρχείο της μορφής ΕΠΩΝΥΜΟ-ΑΜ.tgz στο οποίο θα περιέχεται η αναφορά σε μορφή pdf καθώς και ο κώδικας. Στην αναφορά θα αναγράφονται τα στοιχεία σας: ονοματεπώνυμο, ΑΜ.

Θεωρούμε σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση το ίδιο πρόβλημα και την ίδια γεωμετρία με αυτό της εργαστηριακής άσκησης 1. Υποθέτουμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι μία ανοικτή, φραγμένη περιοχή με ομαλό σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, $g \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$, και ύπαρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

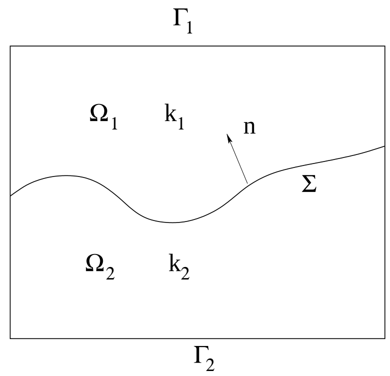
$$k(x) \geq \alpha, \ \ \forall \ x \in \Omega \tag{1}$$

1. Θέλουμε να βρούμε την θερμοκρασία u σε ένα υλικό με θερμική αγωγιμότητα $k(x)$,

$$\begin{cases} -div\,(k(x)\nabla u(x)) = g(x) & \text{στο } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

και θεώρουμε ότι η περιοχή Ω χωρίζεται σε δύο ύπο-περιοχές $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, και ότι η θερμική αγωγιμότητα είναι σταθερή σε κάθε περιοχή

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{στην } \Omega_1 \\ k_2 & \text{στην } \Omega_2 \end{cases} \tag{3}$$



Σχήμα 1: Η περιοχή $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

(α′) Γράψτε την μεταβολική μορφή του προβλήματος (2)

$$a(u, v) = L(v), \ \ \forall \ v \in V \tag{4}$$

(β′) Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών : Βρείτε $\lambda \in \mathbb{C}$ και $u \in V$, $u \neq 0$ τέτοια ώστε,

$$a(u,v) = \lambda(u,v) \ \ \forall\, v \in V \tag{5}$$

Τι μπορείτε να πείτε για αυτό το πρόβλημα? Υποθέτουμε ότι

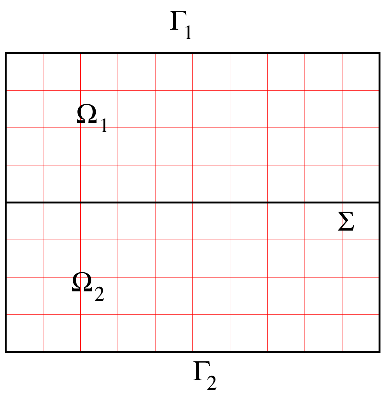
$$k_m \leq k(x) \leq k_M, \ \forall x \in \Omega$$

Χτησιμοποιόντας την αρχή του Min-Max, δώστε άνω και κάτω φράγμα για τις ιδιοτιμές του προβλήματος.

Συμβολίζουμε με Σ το σύνορο μεταξύ Ω_1 και Ω_2, $\Sigma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$, $\Gamma_j = \Gamma \cap \partial\Omega_j$, $j = 1, 2$. Υποθέτουμε ότι $\Omega = [-1,1]^2$ και θεωρούμε ότι $\Sigma = [-1,1] \times \{y = 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ και $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Όπως στην άσκηση 2, προσεγγίζουμε το πρόβλημα (4) χρησιμοποιώντας πεπέρασμενα στοιχεία Q^1. Φτιάξτε μια διακριτοποίηση της περιοχής Ω χρησιμοποιώντας τετράγωνα πλευράς h, $\Omega = \cup_{l=1}^{N_{el}} T_l$. Έστω N_{el} ο ολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχείων, $(M_i)_{i=1..N_s}$ τα σημεία της διακριτοποίησης (οι κορυφές των τετραγώνων) όπου N_s είναι ο ολικός αριθμός των σημείων. Έχουμε $N_s = N_i + N_d$, με N_i τα εσωτερικά σημεία (που δεν ανοικούν στο σύνορο $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) και N_d τα σημεία που ανήκουν στο σύνορο Γ με την συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

(α′) Κατασκευάστε ένα πλέγμα της περιοχής Ω, έτσι ώστε η διεπιφάνεια Σ να συμπίπτει με τις πλευρές των τετραγώνων (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2: Παράδειγμα διακριτοποίησης

Θα πρέπει να ορίσετε :

(ι) N_{el}, N_i, N_d, N_s

(ιι) $coor(m,i)$, η i συντεταγμένη του σημείου m $(1 \leq m \leq N_s, 1 \leq i \leq 2)$.

(ιιι) $lg(l,i)$ ο ολικός αριθμός του σημείου i που ανήκει στο l στοιχείο $(1 \leq l \leq Nel, 1 \leq i \leq 4)$.

(ι) $ref(l)$ ένας δείκτης του στοιχείου l τέτοιος ώστε,

$$ref(l) = \begin{cases} 1 & \text{αν } T_l \subset \Omega_1 \\ 2 & \text{αν } T_l \subset \Omega_2 \end{cases}$$

Έστω V_h,

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}), v_{/T_l} \in Q^1(T_l), \forall T_l, \right\}$$

και $(w_J)_{J=1,N_s}$, οι ολικές συναρτήσης βάσης,

$$w_J(M_I) = \delta_{IJ} \;\; 1 \leq I, J \leq N_s$$

Η προσεγγιστική λύση του προβλήματος γράφεται σύμφωνα με την μέθοδο της παρεμβολής

$$u_h(x) = \sum_{J=1}^{N_s} u_J w_J(x)$$

(β′) Δείξτε ότι το διακριτό πρόβλημα ιδιοτιμών γράφεται : Βρείτε λ_h και $U = \{u_J\}_{J=1}^{N_i}$,

$$KU = \lambda_h MU \tag{6}$$

όπου M είναι ο πίνακας μάζας. M είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος άρα έχουμε $M = L_M L_M^t$ όπου L_M κάτω τριγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα (6) είναι ισοδύναμο με το να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδανύσματα του πίνακα $B = L_M^{-1} K L_M^{-t}$.

(γ′) Γράψτε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει την λύση του (6). Για να τεστάρετε τον κώδικα σας οι λύσεις του συνεχούς προβλήματος για k =σταθερά είναι,

$$\lambda_{m,p} = k\left(\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{2}\right)^2\right), \; m = 1, 2, \ldots, \; p = 1, 2, \ldots,$$
$$u_{m,p} = \sin\left(\frac{m\pi}{2}(x+1)\right)\sin\left(\frac{p\pi}{2}(y+1)\right), \; m = 1, 2, \ldots, \; p = 1, 2, \ldots.$$

2. Τώρα ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις αρμονικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης που αντιστοιχούν σε δεδομένη κυκλική συχνότητα ω :

$$\begin{cases} -div\,(k(x)\nabla u(x)) - \omega^2 u = g(x) & \text{στην } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{7}$$

(α′) Γράψτε την μεταβολική μορφή του προβλήματος (7). Χρησιμοποιόντας την εναλλακτική του Fredholm, γράψτε υπό ποιες συνθήκες το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

(β′) Χρησιμοποιόντας το πρόγραμμα που γράψατε βρείτε τις ιδιοτιμές του προβλήματος (6) για την γεωμετρία του σχήματος 2 και για τις τιμές :

$$(k_1, k_2) = (1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (1,10)\ ,\ (2,1)\ ,\ (10,1)$$

(γ′) Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Δείξτε ότι η επίλυση του προβλήματος (7) με πεπερασμένα στοιχεία Q^1 αντιστοιχεί στο να βρεθεί η λύση U του γραμμικού προβλήματος :

$$(K - \omega^2 M)U = M[g] \tag{8}$$

όπου $[g] = (g(M_I))_{I=1,N_i}$.

(δ′) Γράψτε ένα πρόγραμμα επίλυσης του (8).

(ε′) Τρέξτε το πρόγραμμα επίλυσης με g

$$g(x,y) = g(r) = (1 - \frac{r^2}{a^2})^3 1_{B_a} \tag{9}$$

όπου r είναι η απόσταση του σήμειου (x,y) από το σημείο $(x_s, y_s) = (0, 1/2)$ $r = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}$, $a = 5h$ και 1_{B_a} είναι η συνάρτηση που παίρνει τίμη 1 στο εσωτερικό του δίσκου με ακτίνα a και 0 στο εξωτερικό του. Για τις τιμές

$$(k_1, k_2) = (1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (1,10)\ ,\ (2,1)\ ,\ (10,1)$$

και για διαφορετικές τιμές της συχνότητας $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$. Το μήκος κύματος ορίζεται σε κάθε περιοχή Ω_j, $j = 1,2$

$$\lambda_j = \frac{2\pi\sqrt{k_j}}{\omega} = \frac{\sqrt{k_j}}{f} \tag{10}$$

Για να βρούμε μια καλή προσέγγιση της λύσης πρέπει να χρησιοποιήσουμε ένα πλέγμα με αρκέτα σημεία ανά μήκος κύματος. Στην πράξη, θεωρούμε $NPWL$ των αριθμό σημείων ανά μήκος κύματος και υπολογίζουμε το βήμα του πλέγματος από (για δεδομένη συχνότητα)

$$h \leq \frac{\sqrt{k_m}}{f(NPWL - 1)}$$

όπου $k_m = \min k_1, k_2$.

(ϛ′) Πέρνοντας διαφορετικές τιμές του $NPWL$ $(5, 10, 15$ και $20)$ μελετήστε την επιροή του στην ποιότητα των αποτελεσμάτων.

(ζ′) Τι γίνεται όταν αυξάνεται η συχνότητα ;

(η′) Τι γίνεται όταν η συχνότητα είναι κοντά σε μία ιδιοτιμή του προβλήματος (6) $(\omega^2 = \lambda_h)$;

3. **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** Και σε αυτή την άσκηση όπως και στην προυγούμενη μπορείτε να θεωρίσετε τριγωνοποήση της περιοχής Ω και αντί για πεπερασμένα στοιχεία Q_1 να χρησιμοποίησετε πεπερασμένα στοιχεία P_1.