Αλγεβρικη Θεωρια Αριθμων

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2006

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Α΄ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων

1. (α΄) Ἔστω ὅτι ὁ R εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ δακτυλίου S καὶ τὰ $s_1, \ldots, s_n \in S$ εἶναι ἀκέραια πάνω ἀπὸ τὸν R. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ ἐνδιάμεσου (μεταξὺ R καὶ S) δακτυλίου $R[s_1, \ldots, s_n]$ εἶναι ἀκέραιο πάνω ἀπὸ τὸν R.
   (β΄) Ἔστω $R \subseteq S \subseteq T$ ἁλυσσίδα δακτυλίων καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ S εἶναι ἀκέραιο πάνω ἀπὸ τὸν R. Ἂν τὸ $t \in T$ εἶναι ἀκέραιο πάνω ἀπὸ τὸν S, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ t εἶναι ἀκέραιο καὶ πάνω ἀπὸ τὸν R.
   Ὑπόδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι, γιὰ πεπερασμένο πλῆθος καταλλήλων $s_1, s_2, \ldots \in S$, τὸ t εἶναι ἀκέραιο πάνω ἀπὸ τὸν δακτύλιο $R[s_1, s_2, \ldots]$.

2. Γιὰ $d = 15$ καὶ 21, περιγρᾶψτε τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀκεραίους τοῦ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, δηλαδή, τὸ σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀκέραια πάνω ἀπὸ τὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}$.
   Ὑπόδειξη. Γενικά, γιὰ κάθε d, ποὺ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο, τὸ τυπικὸ στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ μπορεῖ νὰ γραφεῖ μὲ τὴ μορφὴ $(a + b\sqrt{d})/c$, ὅπου a, b, c εἶναι ἀκέραιοι μὲ $(a, b, c) = 1$ καὶ $c > 0$. Ὑπολογῖστε τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμο ἑνὸς τέτοιου στοιχείου.

3. Ἔστω L/K πεπερασμένη ἐπέκταση. Ἀποκλειστικὰ μὲ τὴ βοήθεια τῶν ὁρισμῶν τοῦ ἴχνους καὶ τῆς στάθμης, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \to L$ εἶναι K-γραμμικὸς μετασχηματισμὸς τοῦ L καὶ $\mathrm{N}_{L/K}(xy) = \mathrm{N}_{L/K}(x)\mathrm{N}_{L/K}(y)$ γιὰ ὅλα τὰ $x, y \in L$.

4. Ἔστω $M = \mathbb{Q}(\xi)$, ὅπου ξ εἶναι ρίζα τοῦ $f(X) = X^4 + 4X^2 + 9$. Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπὸ τὸ $\mathbb{Q}$ (ἐλέγξτε το μὲ τὴ βοήθεια τοῦ Maple). Παρατηρῆστε ὅτι $f(X) = (X^2 + \sqrt{2}X + 3)(X^2 - \sqrt{2}X + 3)$ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ εἶναι ὑπόσωμα τοῦ M. Ὑποθέστε, δίχως βλάβη τῆς γενικότητος, ὅτι τὸ ξ εἶναι ρίζα τοῦ $X^2 - \sqrt{2}X + 3$ καὶ ὑπολογῖστε τὸ $\sqrt{2}$ ὡς *πολυωνυμικὴ* ἔκφραση τοῦ ξ.
   Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ $1, \xi$ ἀποτελοῦν μία βάση τῆς M/L καὶ ἐκφράστε τὸ $u = 1 + \xi^3$ συναρτήσει αὐτῆς τῆς βάσεως (μὲ συντελεστές, φυσικά, ἀπὸ τὸ L). Ὑπολογῖστε τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ u ὡς πρὸς τὴν M/K, καθὼς καὶ τὰ $\mathrm{N}_{M/\mathbb{Q}}(u)$ καὶ $\mathrm{Tr}_{M/\mathbb{Q}}(u)$. Ὑπολογῖστε, ἐπίσης, τὰ $\lambda_1 = \mathrm{N}_{M/L}(u)$ καὶ $\lambda_2 = \mathrm{Tr}_{M/L}(u)$ καί, κατόπιν, τὰ $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(\lambda_1)$ καὶ $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\lambda_2)$. Παρατηρῆστε, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολογισμῶν σας, ὅτι $\mathrm{N}_{M/\mathbb{Q}}(u) = \mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(\mathrm{N}_{M/L}(u))$ καὶ $\mathrm{Tr}_{M/\mathbb{Q}}(u) = \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\mathrm{Tr}_{M/L}(u))$.

Δίχως νὰ χρησιμοποιήσετε τὸ θεώρημα, ποὺ λέει ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο ἑνὸς στοιχείου ἰσοῦται μὲ κάποια δύναμη τοῦ ἐλαχίστου πολυωνύμου αυτοῦ τοῦ στοιχείου, ὑπολογῖστε τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ $\sqrt{2}$ ὡς πρὸς τὴν $M/\mathbb{Q}$.

5. Ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς γενικὸ λῆμμα, χρήση τοῦ ὁποίου κάναμε στὸ μάθημα: Ἔστω ὅτι K εἶναι τυχὸν σῶμα, τὰ $f(X), \phi(X)$ εἶναι μονικὰ πολυώνυμα τοῦ $K[X]$ καὶ τὸ $\phi(X)$ εἶναι ἀνάγωγο. Ἔστω ὅτι κάθε ρίζα τοῦ $f(X)$ (αὐτή, ἐν γένει, ἀνήκει σὲ κάποια ἐπέκταση τοῦ K) εἶναι καὶ ρίζα τοῦ $\phi(X)$. Τότε, νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι δύναμη τοῦ $\phi(X)$.

6. (α') Ἔστω ἡ ἁλυσσίδα ἐπεκτάσεων $M = L(\theta) \supseteq L \supseteq K$, ὅπου τὸ θ εἶναι βαθμοῦ m πάνω ἀπὸ τὸ L καὶ $[L : K] = n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathrm{N}_{M/K}(\theta) = \mathrm{N}_{L/K}(\mathrm{N}_{M/L}(\theta))$.
Ὑπόδειξη. Θεωρῆστε μία βάση $\beta_1, \dots, \beta_n$ τῆς L/K. Ἐπίσης, ἔστω $\theta^m = \lambda_0 + \lambda_1\theta + \cdots + \lambda_{m-1}\theta^{m-1}$, ὅπου $\lambda_i \in L$. Γιὰ κάθε $i = 0, \dots, m-1$ καὶ $j = 1, \dots, n$ θέσετε $\lambda_i\beta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk}\beta_k$, ὅπου $a_{ijk} \in K$. Ἀκόμη, γιὰ κάθε $i = 0, \dots, m-1$ ἔστω ὁ $n \times n$ πίνακας $A_i = (a_{ijk})_{j,k}$. Μὲ τὴ βοήθεια τῆς βάσης $\{\beta_i\theta^j,\ i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, m-1\}$ τῆς M/K ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathrm{N}_{M/K}(\theta) = (-1)^{n(m-1)}\det(A_0)$. Τέλος, παρατηρῆστε ὅτι $\mathrm{N}_{M/L}(\theta) = (-1)^{m-1}\lambda_0$.
(β') Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ (α') ἀποδεῖξτε ἐπαγωγικὰ ὅτι, γιὰ κάθε ἁλυσσίδα πεπερασμένων ἐπεκτάσεων $M = L \supseteq L \supseteq K$, ἰσχύει $\mathrm{N}_{M/K} = \mathrm{N}_{L/K} \circ \mathrm{N}_{M/L}$.

7. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο τοῦ $n \times n$ πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n \end{pmatrix}$$

ἰσοῦται μὲ $c_0 + c_1X + \cdots + c_{n-1}X^{n-1} + X^n$.