Αλγεβρικη Θεωρια Αριθμων

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2006

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Β΄ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων

1. Ἔστω ἀριθμητικὸ σῶμα K καὶ D_K ἡ διακρίνουσά του. Ἔστω $\beta_1, \beta_2, \ldots$ βάση τῆς ἐπέκτασης $K/\mathbb{Q}$, ἀποτελούμενη ἀπὸ ἀκέραια στοιχεῖα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ D_K διαιρεῖ τὴ διακρίνουσα $D(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ καὶ τὸ πηλῖκο τους εἶναι τετράγωνο ρητοῦ ἀκεραίου. Εἰδικώτερα, μεταξὺ ὅλων τῶν βάσεων τῆς ἐπέκτασης $K/\mathbb{Q}$, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραια στοιχεῖα, ἐλάχιστη κατ' ἀπόλυτη τιμὴ διακρίνουσα ἔχει ὅποια εἶναι ἀκέραια βάση τοῦ K.

2. Ὑπολογῖστε μία ἀκέραια βάση καὶ τὴ διακρίνουσα τοῦ ἀριθμητικοῦ σώματος $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta^3 + \theta + 3 = 0$.

3. Ἔστω $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta^3 + 3\theta + 5 = 0$.
   (α΄) Ὑπολογῖστε τὰ χαρακτηριστικὰ πολυώνυμα τῶν θ^2 καὶ $(\theta^2 + \theta + 1)/3$.
   (β΄) Ὑπολογῖστε μία ἀκέραια βάση καὶ τὴ διακρίνουσα τοῦ K.

4. Ἔστω $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta^3 + 8\theta + 1 = 0$. Ὑπολογῖστε μία ἀκέραια βάση καὶ τὴ διακρίνουσα τοῦ K.

5. (α΄) Ἔστω $K = \mathbb{Q}(\theta)$ κυβικὸ σῶμα μὲ θ ἀλγεβρικὸ ἀκέραιο, τοῦ ὁποίου τὸν δείκτη συμβολίζομε μὲ $\imath_\theta$. Μεταξὺ τῶν ἀκεραίων τοῦ K τῆς μορφῆς $(x + y\theta)/\imath_\theta$, ὅπου $x, y \in \mathbb{Z}$ καὶ $y \neq 0$, ἐπιλέγομε κάποιον μὲ ἐλάχιστη ἀπόλυτη τιμὴ y, ἔστω τὸν $\gamma = (a + b\theta)/\imath_\theta$. Ἐντελῶς ἀνάλογα, μεταξὺ τῶν ἀκεραίων τοῦ K τῆς μορφῆς $(x + y\theta + z\theta^2)/\imath_\theta$, ὅπου $x, y, z \in \mathbb{Z}$ καὶ $z \neq 0$, ἐπιλέγομε κάποιον μὲ ἐλάχιστη ἀπόλυτη τιμὴ z, ἔστω τὸν $\delta = (c + d\theta + e\theta^2)/\imath_\theta$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ $1, \gamma, \delta$ ἀποτελοῦν ἀκέραια βάση τοῦ K.
   Ὑπόδειξη. Ὁ τυπικὸς ἀκέραιος τοῦ K εἶναι τῆς μορφῆς $(c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2)/\imath_\theta$ καὶ μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς $q + r\gamma + s\delta$, μὲ $q, r, s \in \mathbb{Q}$. Νὰ ἀποδείξετε πρῶτα ὅτι τὸ c_2 εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ e, ὁπότε νὰ συμπεράνετε ὅτι $s \in \mathbb{Z}$. Στὸ ἑπόμενο βῆμα θὰ ἀποδείξετε ὅτι $r \in \mathbb{Z}$ καί, τέλος, ὅτι $q \in \mathbb{Z}$.
   (β΄) Γενικεῦστε τὸ (α΄) γιὰ ὁιουδήποτε βαθμοῦ σῶμα $K = \mathbb{Q}(\theta)$, μὲ θ ἀλγεβρικὸ ἀκέραιο.