Αλγεβρικη Θεωρια Αριθμων

Φθινοπωρινὸ ἑξάμηνο 2006

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Γ' Φυλλάδιο Ἀσκήσεων

Στὸ φυλλάδιο αὐτό, δ.π. σημαίνει διανυσματικὴ περιοχὴ (module) καὶ υ.δ.π. σημαίνει ὑπο-διανυσματικὴ (submodule). Ὁ ὅρος *ἀνυπέρβλητος* χρησιμοποιεῖται ἀντὶ τοῦ *maximal*

Στὶς ἀσκήσεις 1-3, ὁ R εἶναι δακτύλιος, ἡ M εἶναι R-δ.π. καὶ ἡ M' εἶναι υ.δ.π. τοῦ M.

1. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ υ.δ.π. τῆς R-δ.π. M/M' εἶναι, ἀκριβῶς, οἱ E/M', ὅπου E εἶναι υ.δ.π. τῆς M, ἡ ὁποία περιέχει τὴ M'.

2. Ἔστω $\mathcal{E}$ οἰκογένεια υ.δ.π. τῆς M, οἱ ὁποῖες περιέχουν τὴν M'. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν E_0 εἶναι ἀνυπέρβλητο στοιχεῖο τῆς Ε, τότε E_0/M' εἶναι ἀνυπέρβλητο στοιχεῖο τῆς οἰκογένειας $\overline{\mathcal{E}} = \{E/M' \,:\, E \in \mathcal{E}\}$.

3. Ἂν E εἶναι υ.δ.π. τῆς M, τότε $E \cap M'$ εἶναι υ.δ.π. τῆς M' καὶ $E + M'$ εἶναι υ.δ.π. τῆς M, ἡ ὁποία περιέχει τὴ M'.

4. Ἔστω ὅτι ὁ R εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ δακτυλίου A. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς: Ἂν M εἶναι A-δ.π., τότε ἡ M εἶναι καὶ R-δ.π. Ἂν, ἐπιπλέον, ἡ M, ὡς A-δ.π. εἶναι Noether, τότε, θεωρούμενη ὡς R-δ.π. εἶναι, ἐπίσης, Noether.

5. Ἔστω δακτύλιος R καὶ ἰδεῶδες του $I \neq R$. Ἀποδεῖξτε τὴν ἰσοδυναμία τῶν παρακάτω συνθηκῶν (συνθῆκες γιὰ νὰ κληθεῖ τὸ I πρῶτο ἰδεῶδες).
(i) Ἂν J_1, J_2 εἶναι ἰδεώδη τοῦ R τέτοια ὥστε $J_1 J_2 \subseteq I$, τότε ἕνα, τουλάχιστον, ἀπὸ τὰ J_1, J_2 περιέχεται στὸ I.
(ii) $a, b \in R \;\&\; ab \in I \Rightarrow a \in I$ εἴτε $b \in I$.
(iii) Τὸ σύνολο $R \setminus I$ εἶναι κλειστὸ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμό.
(iv) Ὁ δακτύλιος A/I εἶναι ἀκέραια περιοχή.

6. Ἔστω δακτύλιος R καὶ Φ ἡ οἰκογένεια τῶν ἰδεωδῶν τοῦ R, τὰ ὁποῖα περιέχονται γνησίως στὸν R. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $I \in \Phi$ εἶναι ἀνυπέρβλητο στοιχεῖο τῆς Φ ἄν, καὶ μόνο ἄν, ὁ δακτύλιος R/I εἶναι σῶμα.

7. Γιὰ ὁποιαδήποτε ἰδεώδη I, J ἑνὸς δακτυλίου R ἀποδεῖξτε ὅτι ἰσχύει $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I + J$.

8. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ D καὶ F ὑποδακτύλιος τῆς D, ὁ ὁποῖος εἶναι σῶμα. Ἂν κάθε στοιχεῖο τῆς D εἶναι ἀλγεβρικὸ πάνω ἀπὸ τὸ F, ἀποδεῖξτε ὅτι καὶ ἡ D εἶναι σῶμα.

9. Ἔστω A οἱ ἀκέραιοι τοῦ ἀριθμητικοῦ σώματος K.
(i) Ἂν $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἰδεῶδες $3A + (1+\sqrt{-5})A$ τοῦ A δὲν εἶναι κύριο.
(ii) Ἂν $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἰδεῶδες $7A + (3+\sqrt{-19})A$ τοῦ A εἶναι κύριο.