Αλγεβρικη Θεωρια Αριθμων

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἐξέταση 7ης Φεβρουαρίου 2007

1. Ἔστω περιττὸς πρῶτος p, ζ ἀρχικὴ p-ρίζα τῆς μονάδος, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ καὶ A ὁ δακτύλιος τῶν ἀκεραίων τοῦ K.
   Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $k \in \mathbb{Z}$, ὁ $\epsilon = (1-\zeta^k)/(1-\zeta)$ εἶναι μονάδα τοῦ A.

2. Ἔστω $K = \mathbb{Q}(\theta)$, ὅπου $\theta^4 = 8$.
   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ $1, \theta, \dfrac{\theta^2}{2}, \dfrac{\theta^3}{4}$. ἀποτελοῦν ἀκέραια βάση.
   (β′) Παραγοντοποιῆστε τὸ (7) σὲ πρῶτα ἰδεώδη.
   (γ′) Μὲ τὴ βοήθεια κάποιων ἀπὸ τὰ ἰδεώδη ποὺ διαιροῦν τὸ 7, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ μονάδα $\epsilon = 1 - \theta^3/4$ δὲν εἶναι οὔτε ἄρτια δύναμη, οὔτε κύβος ἄλλης μονάδας.
   Γιὰ νὰ διευκολυνθεῖτε στὶς πράξεις, δίνεται ὁ τύπος τῆς στάθμης τοῦ K:
$$\begin{aligned}\mathrm{N}(x + y\theta + z\theta^2 + w\theta^3) = {} & x^4 - 8y^4 + 64z^4 - 512w^4 - 16x^2z^2 + 128y^2w^2 \\ & - 32x^2yw + 32xy^2z - 256yz^2w + 256xzw^2\,.\end{aligned}$$

3. Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ $f(x, y) = x^2 + xy + 4y^2$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ f ἀναπαριστᾷ ἕνα τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $p, 2p$, ὅπου p περιττὸς πρῶτος, τότε $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$. Ἀντιστρόφως, ἂν ὁ p εἶναι πρῶτος καὶ $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$, τότε ἕνας ἐκ τῶν $p, 2p$ ἀναπαριστᾶται ἀπὸ τὴν f.
   Ὑπόδειξη. Θὰ χρειασθεῖ νὰ ἐργασθῆτε σὲ κάποιο τετραγωνικὸ σῶμα $K = \mathbb{Q}(\theta)$, ὅπου $1, \theta$ ἀποτελοῦν ἀκέραια βάση τοῦ K. Ὁ ἀριθμὸς κλάσεων ἰδεωδῶν τοῦ K εἶναι 2 καὶ τὸ $\mathfrak{p}_2 = (2, \theta)$ εἶναι γεννήτορας τῆς ὁμάδος κλάσεων ἰδεωδῶν.

4. Ἔστω $K = \mathbb{Q}(\omega)$, ὅπου $\omega^2 - \omega + 6 = 0$.
   (α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς κλάσεων τοῦ K εἶναι 3.
   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $(2) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2'$, ὅπου $\mathfrak{p}_2 = (2, \omega)$ καὶ $\mathfrak{p}_2' = (2, 1 + \omega)$.
   (γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathfrak{p}_2^2 = 4\mathbb{Z} + (2 + \omega)\mathbb{Z}$ καὶ $\mathfrak{p}_2^3 = (2 - \omega)$.
   Ὑπόδειξη. Σ’ αὐτὸ τὸ ἐρώτημα θὰ σᾶς φανεῖ χρήσιμο τὸ Ε′ φυλλάδιο ἀσκήσεων.
   (δ′) Ἐξηγῆστε γιατὶ κάθε ἰδεῶδες $\mathfrak{a}$ εἶναι τῆς μορφῆς $\mathfrak{a} = \gamma\mathfrak{p}_2^j$ γιὰ κάποιο $\gamma \in K$ καὶ κάποιο $j \in \{0, 1, 2\}$ καὶ προσδιορῖστε ὅλα τὰ (γ, j) ἔτσι ὥστε $\mathfrak{a}^3 = (1 + 2\omega)$.

5. Λῦστε τὴν ἄσκηση 2 τοῦ Ζ′ φυλλαδίου ἀσκήσεων.