

ΑΛΓΕΒΡΑ
Χειμερινό Έξάμηνο 2015-2016
Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

Άσκήσεις τής 12^{ης} εβδομάδας

89. Σ' αυτή την άσκηση κάνετε click στον [ΠΙΝΑΚΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΤΗΣ \$S_4\$](#) .
- (α') Κάνοντας χρήση του πίνακα και του «κριτηρίου υποομάδων» αποδείξτε ότι το $H = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ είναι υποομάδα τής S_4 (το 1 συμβολίζει την ταυτοτική μετάθεση).
- (β') Υπολογίστε την άριστερη και τη δεξιά κλάση του $(1\ 2\ 3\ 4) \in S_4$ ως προς την H και διαπιστώστε ότι είναι διαφορετικές. Είναι ξένες;
- (γ') Θέσετε $(1\ 2\ 3) = a$, $(1\ 2) = b$ και εκφράστε όλες τις μεταθέσεις τής H συναρτήσει των a, b . Διαπιστώστε ότι $a^3 = 1$, $b^2 = 1$ και $ba = a^2b$. Θυμηθείτε ότι η διεδρική ομάδα βαθμού 3 είναι ή $D_3 = \langle a, b \mid a^3 = 1 = b^2, ba = a^2b \rangle$ και έξ αυτού συμπεράνατε ότι $H \cong D_3$.
90. Σ' αυτή την άσκηση κάνετε click στον [ΠΙΝΑΚΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΤΗΣ \$S_4\$](#) .
- (α') Κάνοντας χρήση του πίνακα και του «κριτηρίου υποομάδων» αποδείξτε ότι το
- $$K = \{1, (3\ 4), (1\ 2), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4)(2\ 3)\}$$
- είναι υποομάδα τής S_4 (το 1 συμβολίζει την ταυτοτική μετάθεση). Ποιός είναι ο δείκτης $[G : K]$ τής K στη G ;
- (β') Υπολογίστε όλες τις άριστερες και όλες τις δεξιές κλάσεις τής S_4 ως προς την K . Είναι ή K κανονική υποομάδα τής G ;
- (γ') Θέσετε $(1\ 3\ 2\ 4) = a$, $(3\ 4) = b$ και εκφράστε όλες τις μεταθέσεις τής K συναρτήσει των a, b . Διαπιστώστε ότι $a^4 = 1$, $b^2 = 1$ και $ba = a^3b$. Θυμηθείτε ότι η διεδρική ομάδα βαθμού 4 είναι ή $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = 1 = b^2, ba = a^3b \rangle$ και έξ αυτού συμπεράνατε ότι $K \cong D_4$.
91. Έστω ομάδα G και H υποομάδα τής G , τής όποιας ο δείκτης στη G είναι 2 ($[G : H] = 2$). Αποδείξτε ότι $H \triangleleft G$.
- Υπόδειξη. Υπάρχουν δύο άκριβώς άριστερες κλάσεις. Η μία είναι ή H . Έξηγηστε γιατί ή δεύτερη ταυτίζεται με το σύνολο $G \setminus H$. Κάνετε ανάλογο συλλογισμό και για τις δεξιές κλάσεις.
92. Έστω ομάδα G , τής όποιας ή τάξη είναι πρώτος αριθμός.
- (α') Αποδείξτε ότι ή μόνη γνήσια υποομάδα τής G είναι ή τετριμμένη (αυτή που περιέχει μόνο το ούδέτερο στοιχείο).
- Υπόδειξη. Αν $H \leq G$, τότε, από το Θεώρημα του Lagrange, ή τάξη τής $H \dots$
- (β') Βάσει του (α') αποδείξτε ότι ή G είναι κυκλική, δηλαδή, κάθε ομάδα, τής όποιας ή τάξη είναι πρώτος αριθμός, είναι κυκλική.
- Υπόδειξη. Έστω $|G| = p$, όπου ο p είναι πρώτος, και όποιοδήποτε $a \in G$, πλην του ούδετέρου. Θεωρήστε την υποομάδα $\langle a \rangle$ τής G .
93. Έστω ότι H_1, H_2 είναι υποομάδες τής ομάδας G , με $|H_1| = m$, $|H_2| = n$ και $(m, n) = 1$. Δείξτε ότι $H_1 \cap H_2$ είναι ή τετριμμένη υποομάδα τής G .

94. Έστω ομάδα G τάξεως p^m , όπου ο p είναι πρώτος και $m \geq 1$. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο της G με τάξη p .

Υπόδειξη. Έστω ότι η G είναι πολλαπλασιαστική ομάδα και $a \in G, a \neq 1$. Δείξτε ότι τάξη $(a) = p^k$ για κάποιο $k \in \{1, \dots, m\}$. Αν $k \geq 2$, ποιά είναι η τάξη του $a^{p^{k-1}}$;

95. Αποδείξτε ότι η αντιστοιχία $\mathbb{Z}_4 \ni [k] \mapsto i^k \in \mathbb{C}^*$ είναι μία καλά ορισμένη απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \langle i \rangle$, η οποία είναι ισομορφισμός ομάδων. Συμπληρώστε τους πίνακες πράξεων αυτών των ομάδων

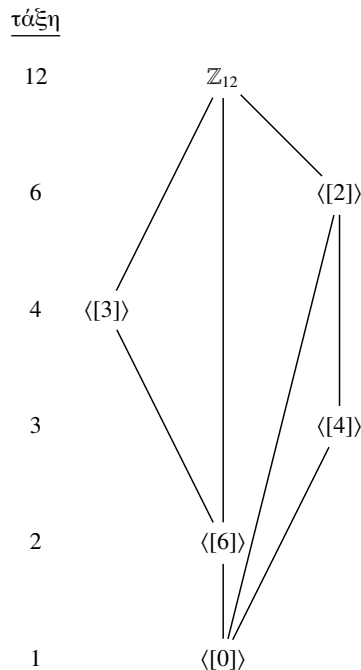
+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]				
[1]				
[2]				
[3]				

·	$\phi([0])$	$\phi([1])$	$\phi([2])$	$\phi([3])$
$\phi([0])$				
$\phi([1])$				
$\phi([2])$				
$\phi([3])$				

(στον δεξιό πίνακα αντικαταστήτε τα $\phi([k])$ με τις τιμές τους). Στη συνέχεια κάνετε το έξης: Στον αριστερό πίνακα βάλτε όπου $[0], [1], [2], [3]$ τα σύμβολα e, a, b, c , αντίστοιχως και στον δεξιό πίνακα βάλτε όπου $\phi([0]), \phi([1]), \phi([2]), \phi([3])$, πάλι τα σύμβολα e, a, b, c , αντίστοιχως. Παρατηρήστε ότι οι πίνακες που θα προκύψουν μετά τις αντικαταστάσεις αυτές είναι ίδιοι. Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος να “δοῦμε” την ισομορφία $\mathbb{Z}_4 \cong \langle i \rangle$.

96. Υπολογίστε όλες τις υποομάδες της $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και κατασκευάστε το σχετικό «διάγραμμα υποομάδων».

Απάντηση:



Ανάλογο ζήτημα για τις (προσθετικές) ομάδες $\mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{15}$ και \mathbb{Z}_{16} .

Άναφορές

- [1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.