

# ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016

Βασική περιγραφή των θεμάτων που συζητήθηκαν την 10<sup>η</sup> εβδομάδα  
(Δεν πρόκειται για λεπτομερή περιγραφή.)

- **Όμοιας συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου και του τετραγώνου.**
- **Τάξη ομάδας και τάξη στοιχείου.**
- **Πρόταση 1.** Σε κάθε ομάδα  $G$  ισχύει  $\text{τάξη}(a) = \text{τάξη}(a^{-1})$  για κάθε  $a \in G$ .
- **Πρόταση 2.** Έστω ομάδα  $(G, \cdot)$  και  $a \in G$  τάξεως  $n$ .  
(α') Αν για κάποιο ακέραιο  $k$  ισχύει  $a^k = 1$ , τότε  $n|k$ .  
(β') Για κάθε ακέραιο  $m$  ισχύει  $\text{τάξη}(a^m) = \frac{n}{(m, n)} = \frac{\text{τάξη}(a)}{(\text{τάξη}(a), m)}$ .  
Πόρισμα:  $\text{τάξη}(a^m) = \text{τάξη}(a) \Leftrightarrow (m, \text{τάξη}(a)) = 1$ .
- **Υποομάδα.**
- **Πρόταση 3** (Κριτήριο υποομάδας). Έστω ομάδα  $(G, \cdot)$  και  $\emptyset \neq H \subseteq G$ . Το  $H$  είναι υποομάδα της  $G$  αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής δύο συνθήκες:  
(α') Αν  $h_1, h_2 \in H$ , τότε  $h_1 h_2 \in H$ .  
(β') Αν  $h \in H$ , τότε  $h^{-1} \in H$ .
- **Υποομάδα παραγόμενη από στοιχείο ομάδας - Κυκλική υποομάδα.**
- **Πρόταση 4.** Έστω ομάδα  $(G, \cdot)$  και  $a \in G$ .  
(α') Αν  $\text{τάξη}(a) = n$ , τότε  $\langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ .  
Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι  $|\langle a \rangle| = \text{τάξη}(a)$ .  
(β') Αν η τάξη του  $n$  είναι άπειρη, τότε όλες οι δυνάμεις του  $a$  είναι διαφορετικές και, συνεπώς,  $\langle a \rangle = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \dots\}$ .

## Άναφορές

- [1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ' έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.