

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Έξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου 2015

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

27 Αυγούστου 2015

1. Θεωρήστε το εὐθὺ γινόμενο $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}^*$ τῶν ομάδων $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ καὶ $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$. Τὴν πράξη τῆς ομάδας $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}^*$ συμβολίστε προσθετικά. Ὑπολογίστε τὸ στοιχεῖο -3 ([4], [2]). Ἡ ἀπάντησή σας θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $([a], [b])$, ὅπου a, b ἀκέραιοι μὲ $0 \leq a, b \leq 14$.
μον. 0.5

2. Ἐστω ἡ ἕκτη διεδρική ομάδα D_6

$$D_6 = \langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = 1, ba = a^5b \rangle.$$

Θεωρήστε δεδομένο ὅτι ἡ D_6 ἔχει τὰ ἐξῆς, ἀκριβῶς, στοιχεῖα: $1, a, \dots, a^5, b, ba, \dots, ba^5$.

(α') Ἀποδείξτε ὅτι ἡ ὑποομάδα $H = \langle a^2 \rangle$ τῆς D_6 εἶναι κανονική. Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε τὴ σχέση $ba^i = a^{6-i}b$ γιὰ κάθε $i = 1, \dots, 5$.
μον. 0.5

(β') Κατασκευάστε τὸν πίνακα τῆς πράξης τῆς ομάδας D_6/H . Γιὰ ἀπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ, νὰ γράφετε \bar{x} ἀντὶ xH . Παρατηρώντας τὸν πίνακα ἐξηγήστε γιὰτί ἡ D_6/H εἶναι ἀβελιανή καὶ βρεῖτε μὲ ποιά ομάδα τῆς μορφῆς \mathbb{Z}_n ἢ τῆς μορφῆς $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ εἶναι ἰσόμορφη.
μον. 1

3. (α') Γράψτε ὅλους τοὺς ἰσομορφικοὺς τύπους τῶν ἀβελιανῶν ομάδων τάξεως 108.
μον. 0.5

(β') Ἐστω ἀβελιανή ομάδα G , τάξεως 108, ἡ ὁποία περιέχει στοιχεῖο τάξεως 36 καὶ δὲν περιέχει στοιχεῖο τάξεως 27. Ποῖος εἶναι ὁ ἰσομορφικὸς τύπος τῆς G ; Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε τὸ ὅτι, ἂν μία ομάδα περιέχει ἓνα στοιχεῖο τάξεως n καὶ ὁ d εἶναι θετικὸς διαιρέτης τοῦ n , τότε ἡ ομάδα περιέχει στοιχεῖο τάξεως n/d .
μον. 1

4. Ἐστω G ἡ πολλαπλασιαστικὴ ομάδα τῶν 2×2 ἀντιστρέψιμων πινάκων πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ ὑποσύνολό της

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

(α') Ἀποδείξτε ὅτι $H < G$ καὶ ἡ ἀπεικόνιση $f : H \rightarrow \mathbb{R}^*$, πὸν στέλνει τὸν πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ στὸ a , εἶναι ἐπιμορφισμὸς ομάδων.
μον. 0.5

(β') Ὑπολογίστε τὸν πυρήνα τῆς f .
μον. 0.5

(γ') Ἐὰν $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$, τότε $K \triangleleft H$ καὶ $H/K \cong \mathbb{R}^*$.
μον. 1

5. Έστω η άκέραια περιοχή $D = \{a + bi\sqrt{6} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- (α') Αποδείξτε ότι $D^* = \{\pm 1\}$ και ότι το $i\sqrt{6}$ είναι ανάγωγο στοιχείο της D . μον. 0.5
- (β') Βοηθούμενοι από τη σχέση $-2 \cdot 3 = (i\sqrt{6})^2$, αποδείξτε ότι το $i\sqrt{6}$ δεν είναι πρώτο στοιχείο της D . μον. 0.5
- (γ') Αποδείξτε ότι υπάρχουν ιδεώδη της D , που δεν είναι κύρια. μον. 0.5
6. Έστω ο δακτύλιος $K = \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle$.
- (α') Αποδείξτε ότι ο K είναι σώμα. μον. 1
- (β') Δείξτε, ότι το στοιχείο $X + \langle X^2 + X + 1 \rangle \in K$ είναι κυβική ρίζα της μονάδας του K . μον. 1
7. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις $D = \mathbb{Z}$, $D = \mathbb{Q}$, $D = \mathbb{R}$ και $D = \mathbb{C}$, θεωρήστε το πολυώνυμο $f(X) = (2X^2 + 4)(3X^2 - 6) \in D[X]$ και αναλύστε το $f(X)$ σε γινόμενο της μορφής
- $$f(X) = \epsilon \cdot g_1(X) \cdot g_2(X) \cdots,$$
- όπου, $\epsilon \in D^*$, καθένα από τα $g_i(X)$ (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά μεταξύ τους) είναι ανάγωγο στοιχείο της $D[X]$ και, στην περίπτωση, που κάποιο $g_i(X)$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο, ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του είναι 1. Η απάντησή σας πρέπει να είναι διατυπωμένη στη μορφή $\epsilon = \dots$, $g_1(X) = \dots$, $g_2(X) = \dots$ με μικρές επεξηγήσεις γιατί είναι ανάγωγα της $D[X]$ τα $g_i(X)$, που θα βρείτε. μον. 1
8. Αποδείξτε ότι το $f(X, Y) = X^2 + XY + Y \in \mathbb{Q}[X, Y]$ είναι ανάγωγο στοιχείο της άκέραιας περιοχής $\mathbb{Q}[X, Y]$. Η απόδειξή σας να είναι σύντομη, αλλά σχολαστικά διατυπωμένη. μον. 1

Όδηγίες

- Επιτρέπεται να συμβουλευέστε τις σημειώσεις **μου**. Απαγορεύεται να έχετε γράψει οποιοδήποτε σχόλιο σε αυτές. Η παραβίαση αυτού του κανόνα συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού σας.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αναπόδεικτη οποιαδήποτε πρόταση των σημειώσεών **μου**, υπό τον όρον ότι θα την προσδιορίσετε σαφώς, με την αρίθμησή της και θα δείξετε ότι, στη συγκεκριμένη εφαρμογή που θα κάνετε, πληροῦνται οι υποθέσεις της πρότασης.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αναπόδεικτη οποιαδήποτε πρόταση των βιβλίων, που προτείνονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος, υπό τον όρον ότι θα την διατυπώσετε στη γενική μορφή της και θα δείξετε ότι, στη συγκεκριμένη εφαρμογή που θα κάνετε, πληροῦνται οι υποθέσεις της πρότασης.

Βαθμολογία

Σύνολο μονάδων 11. Η βαθμολογία προκύπτει ως εξής: Έστω B_1 ή βαθμολογία, που συγκεντρώνετε από τα θέματα 1-4 και B_2 ή βαθμολογία, που συγκεντρώνετε από τα θέματα 5-8. Τότε ο βαθμός σας είναι

$$B_1 + B_2 - \max\{2.5 - B_1, 0\} - \max\{2.5 - B_2, 0\}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι, για να πάρετε τη βάση (5), πρέπει $B_1 \geq 2.5$ και $B_2 \geq 2.5$.

Καλή επιτυχία!