

Δ΄ Φυλλάδιο Άσκήσεων Αναλυτικής Γεωμετρίας-Μιγαδικών Αριθμῶν

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

1. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις ὑπολογίστε τὴν ἐφαπτομένη τῆς ὀξείας γωνίας τῶν εὐθειῶν ϵ_1, ϵ_2 .
 (α΄) $\epsilon_1 : 3x - 2y = 11, \epsilon_2 : 3x + 5y - 2 = 0$
 (β΄) $\epsilon_1 : 5x - 2y - 1 = 0, \epsilon_2 : -10x + 4y + 3 = 0$
 (γ΄) $\epsilon_1 : 3x - 1 = 0, \epsilon_2 : 2x + 7y - 2 = 0$
 (δ΄) $\epsilon_1 : 2y + 9 = 0, \epsilon_2 : x + 5y + 3 = 0$.
2. Ἐστω τὸ τρίγωνο ABC μὲ $A = (1, 4), B = (-1, -1), C = (5, 1)$. Ἐστω D σημεῖο τῆς πλευρᾶς AC τέτοιο ὥστε $AD = AC/4$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς AB , πρὸς τὸ μέρος τοῦ A , σημεῖο E , τέτοιο ὥστε $AE = AB/3$. Ὑπολογίστε τὶς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς P τῶν εὐθειῶν BD καὶ CE .
3. Ὑπολογίστε τὶς συντεταγμένες τῆς προβολῆς τοῦ σημείου $P = (2, 1)$ πάνω στὴν εὐθεῖα $3x + 4y + 40 = 0$ καί, στὴ συνέχεια, τὶς συντεταγμένες τοῦ συμμετρικοῦ P' τοῦ P ὡς πρὸς αὐτὴ τὴν εὐθεῖα.
4. Ὑπολογίστε τὶς συντεταγμένες τῆς προβολῆς τοῦ σημείου $P = (1, -1, 1)$ πάνω στὸ ἐπίπεδο $2x + 3y + 4z - 61 = 0$ καί, στὴ συνέχεια, τὶς συντεταγμένες τοῦ συμμετρικοῦ P' τοῦ P ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπίπεδο.
5. Προσδιορίστε τὴν ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖο διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $A = (2, 3, -4), B = (1, 0, 5), C = (-1, -1, -2)$, καὶ τὶς συντεταγμένες τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνο ABC κύκλου.
6. Τὰ $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3), D = (d_1, d_2, d_3)$ εἶναι τέσσερις γειτονικὲς κορυφές ἑνὸς παραλληλεπιπέδου. Ἀποδείξτε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀπόλυτη τιμὴ τῆς ὀρίζουσας

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}.$$

7. Δίνονται τὰ σημεῖα $A = (3, -2, 1), B = (5, 1, 2), C = (1, 2, 1)$.
 (α΄) Ποιὰ εἶναι ἡ ἀπόσταση d τοῦ A ἀπὸ τὴν εὐθεῖα BC ;
 (β΄) Βρεῖτε τὶς συντεταγμένες τῆς προβολῆς A' τοῦ A πάνω στὴν εὐθεῖα BC .
 (γ΄) Ἐστω D σημεῖο στὴν προέκταση τῆς $A'A$ πρὸς τὸ μέρος τοῦ A , τέτοιο ὥστε τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AD νὰ εἶναι $3d$. Βρεῖτε τὶς συντεταγμένες τοῦ D .
 Ὑπόδειξη: Ὑπολογίστε πρῶτα τὸν ἀπλὸ λόγος $(AA'D)$.
8. Τὰ $A = (2, 3, 0), B = (-1, 0, 4), C = (2, 2, 3), D = (4, -3, -2)$ εἶναι τέσσερις γειτονικὲς κορυφές ἑνὸς παραλληλεπιπέδου. Ὑπολογίστε τὶς συντεταγμένες ὅλων τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἀπέναντι στὴν ἑδρα (παραλληλόγραμμο) \mathbb{E}_1 , ποὺ περιέχει τὶς κορυφές A, B, C , βρίσκεται μία παράλληλη ἑδρα \mathbb{E}_2 , ποὺ περιέχει τὴν κορυφή D . Θεωρεῖστε τὴ διαγώνιο δ_1 τῆς ἑδρας \mathbb{E}_1 , ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφή A , καὶ τὴ διαγώνιο δ_2 τῆς ἑδρας \mathbb{E}_2 , ἡ ὁποία δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφή D .
 (α΄) Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση τῶν διαγωνίων δ_1, δ_2 .
 (β΄) Ὑπολογίστε τὶς συντεταγμένες τῶν σημείων $Q_1 \in \delta_1$ καὶ $Q_2 \in \delta_2$, ὅπου Q_1Q_2 εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμήμα, ποὺ εἶναι κάθετο καὶ στὴ δ_1 καὶ στὴ δ_2 .