Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ
ΚΥΚΛΟΣ

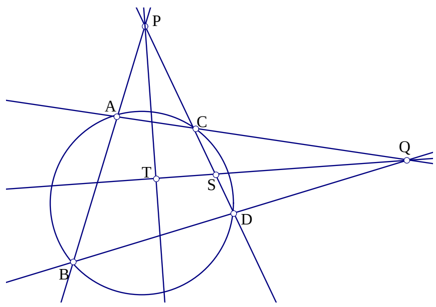
1. Δύο κύκλοι τέμνονται στὰ σημεῖα P, Q. Ἔστω ὅτι A καὶ B εἶναι σημεῖα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δεύτερου κύκλου, ἀντιστοίχως, τέτοια ὥστε, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα PA καὶ PB νὰ εἶναι διάμετροι τῶν ἀντιστοίχων κύκλων. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία AB διέρχεται διὰ τοῦ Q.

2. Θεωροῦμε τὸν περιγεγραμμένο περὶ τὸ τρίγωνο ABC κύκλο, ἔστω κέντρου O. Φέρομε τὴ διχοτόμο τῆς $\angle A$, ἡ ὁποία, προεκτεινόμενη, τέμνει τὸν κύκλο στὸ σημεῖο P, ἔστω. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀκτίνα OP εἶναι κάθετη ἐπὶ τὴν BC.

3. Δίδεται κύκλος καὶ σημεῖο P ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ P φέρομε ἐφαπτομένη PT στὸν κύκλο (T τὸ σημεῖο ἐπαφῆς) καὶ τυχαῖα τέμνουσα PAB τοῦ κύκλου (A, B τὰ σημεῖα τομῆς μὲ τὸν κύκλο, τὸ A πλησιέστερο στὸ P). Ἀποδεῖξτε ὅτι
$$\angle APT = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{BT}} - \overset{\frown}{\mathrm{AT}}}{2}.$$

4. Ἔστω τρίγωνο ABC καὶ ὁ περιγεγραμμένος περὶ αὐτὸ κύκλος. Φέρομε τὴν ἐξωτερικὴ διχοτόμο τῆς $\angle A$, ἔστω δ. Ἂν ἡ δ δὲν εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἔστω P τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς της μὲ αὐτόν. Ἀποδεῖξτε ὅτι, τότε, $PB = PC$. Ἂν, ὅμως, ἡ δ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, τότε ἀποδεῖξτε ὅτι $AB = AC$.

5. Στὸ σχῆμα 1 οἱ εὐθεῖες PT καὶ QT εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν APC καὶ CQD,

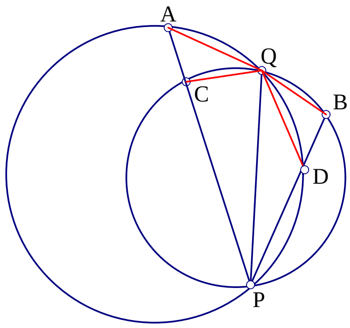


Σχῆμα 1: Ἄσκηση 5

ἀντιστοίχως. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες αὐτὲς εἶναι κάθετες μεταξύ τους.

Ὑπόδειξη. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ γωνίες TPS καὶ TSP εἶναι συμπληρωματικές. Δεῖτε τὴν $\angle TSP$ ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου SCQ. Εἶναι πολὺ βασικὸ νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν ἐφαρμογὴ τῆς σελ. 125 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου.

6. Στὸ σχῆμα 2 τὰ σημεῖα A καὶ B ἔχουν ἐπιλεγεῖ ἔτσι ὥστε ἡ κοινὴ χορδὴ PQ τῶν δύο κύκλων νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς $\angle APB$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $AC = BD$.



Σχῆμα 2: Ἄσκηση 6

Ὑπόδειξη. $\triangle QAC = \triangle QBD$. Παρατηρῆστε ὅτι $\angle DQA = \angle CQB$ ὡς παραπληρωματικὲς τῆς γωνίας …; (Δεῖτε τὶς ἰδιότητες τῶν ἐγγραφίμων τετραπλεύρων· θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 6.6 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου.)

7. Τρεῖς κύκλοι $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ ἴσων ἀκτίνων, ἔστω r, μὲ ἀντίστοιχα κέντρα K_1, K_2, K_3, ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο P. Ἔστω ὅτι A τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, B τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ καὶ C τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ ABC κύκλος ἔχει, ἐπίσης, ἀκτίνα r.
Παρατηρῆστε ὅτι τὸ P εἶναι περίκεντρο τοῦ τριγώνου $K_1K_2K_3$. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ τὸ τρίγωνο κύκλου; Μετά, χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 5 τῆς ἑνότητας Ασκησεις επι των Βασικων Γνωσεων - Τριγωνα και Παραλληλογραμμα γιὰ ν' ἀποδείξετε τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ABC καὶ $K_1K_2K_3$.