Εὐκλείδεια Γεωμετρία

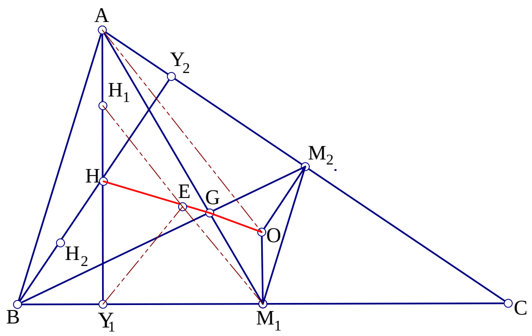
Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 10
Τετάρτη 20-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Συνεχίζομε τὴ μελέτη τοῦ σχήματος 1, ἴδιου μὲ τὸ τελευταῖο σχῆμα τοῦ προηγουμένου (9) μαθήματος. Τὰ H_1 καὶ H_2 εἶναι τὰ μέσα τῶν AH καὶ BH, ἀντιστοίχως, ἐνῶ E εἶναι τὸ μέσο τοῦ HO. Ὅπως ἀποδείξαμε στὸ προηγούμενο (9) μάθημα, τὸ AH εἶναι ὁμοιόθετο



Σχῆμα 1: Κύκλος τοῦ Euler

τοῦ OM_1 ὡς πρὸς τὴν ὁμοιοθεσία κέντρου G καὶ λόγου -2, ἄρα, $OM_1 = AH/2 = H_1H$. Ἀλλὰ τότε, καθὼς τὰ H_1H καὶ OM_1 εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, τὸ τετράπλευρο H_1HM_1O εἶναι παραλληλόγραμμο, ὁπότε οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία H_1M_1 διέρχεται διὰ τοῦ μέσου E τοῦ HO ἤ, μ' ἄλλα λόγια, τὰ σημεῖα H_1, E καὶ M_1 εἶναι συνευθειακά.
Κοιτάζομε τώρα τὸ ὀρθογώνιο στὸ Y_1 τρίγωνο $Y_1H_1M_1$. Τὸ Y_1E εἶναι διάμεσος, ἄρα ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας H_1M_1. Αὐτό, ὅμως, συνεπάγεται ὅτι, ἂν γράψομε κύκλο μὲ κέντρο τὸ E καὶ ἀκτίνα EH_1, ὁ κύκλος θὰ περάσει καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Y_1 καὶ M_1. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς ἀκτίνας; Ἂν συμβολίσομε μὲ R τὴν ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ $\triangle ABC$ κύκλου, τότε $OA = R$. Ὅμως, στὸ τρίγωνο HAO τὰ H_1 καὶ E εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν HA καὶ HO, ἀντιστοίχως, ἄρα, $EH_1 = R/2$.
Καταλήγομε, λοιπόν, στὸ συμπέρασμα ὅτι *ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ μέσο E τοῦ HO καὶ ἀκτίνα $R/2$ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα M_1 (μέσο τῆς πλευρᾶς BC), Y_1 (ἴχνος -ἤ πόδι-τοῦ ὕψους ἀπὸ τὴν κορυφὴ A) καὶ H_1 (μέσο τῆς ἀπόστασης τῆς κορυφῆς A ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρο).*
Κατ' ἀναλογίαν, ὁ ἴδιος κύκλος θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τ' σημεῖα M_2, Y_2, H_2 καὶ ἀπὸ τὰ

σημεῖα M_3, Y_3, H_3, τὰ ἀντίστοιχα γιὰ τὴν κορυφὴ C καὶ τὴν πλευρὰ BC (ποὺ δὲν σχεδιάστηκαν στὸ σχῆμα). Ἄρα, ἔχομε τὸ ἑξῆς:

Θεώρημα. (Κύκλος Euler) *Ἔστω τρίγωνο ABC, H τὸ ὀρθόκεντρο, O τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ R ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Τότε, ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ μέσο E τοῦ HO καὶ ἀκτίνα $R/2$ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία μέσα τῶν πλευρῶν, τὰ τρία ἴχνη (πόδια) τῶν ὑψῶν καὶ τὰ τρία μέσα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἀπὸ τὸ H. Ὁ κύκλος αὐτός, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρο βρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας Euler τοῦ τριγώνου, λέγεται* κύκλος Euler *ἢ* κύκλος τῶν ἐννέα σημείων *τοῦ τριγώνου.*